Elementos del lenguaje matemático(Preliminar)

Fanny Santamaría

Junio 8 de 2009

Índice general

Introducción

Capítulo 1

Cálculo proposicional

En el cálculo proposicional se construye un lenguaje artificial que evita la expresividad del lenguaje cotidiano (español), para intentar inferir lo que es 'verdad'. Esto significa que es un alfabeto que no construye palabras ni frases. Las letras representan frases cuyo significado desconocemos. Sólo sabemos que estas frases pueden ser verdaderas o falsas.

En este lenguaje también existen conectivos que nos dan nuevas frases a partir de las frases representadas por letras. De estas nuevas frases de nuevo sólo sabemos cómo inferir las posibilidades de verdad o falsedad.

En síntesis lo que intenta este cálculo proposicional es desarrollar el álgebra más sencilla que existe de la 'verdad'. Más sencilla en el sentido de que no se refiere a ningún contexto (Como sí lo hace el cálculo de predicados).

1.1. Proposiciones

Definición 1.

Una proposición es una afirmación que tiene la posibilidad de ser verdadera o de ser falsa, pero no de ser verdadera y falsa simultáneamente.

La proposiciones se representan por letras minúsculas: $p, q, r, s, t, ...$

Para dar una idea de qué tipos de afirmaciones son las que se consideran proposiciones lo mejor es dar ejemplos en español de cuáles frases no cumplen esta condición:

Ejemplo 1.1.1.

¿Qué hora es?   Prohibido fumar.

Frases que sí cumplen la condición enuciada en la definición se muestran en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1.2.

Las funciones son relaciones.	Fumar es dañino.	2^2 es igual a 9.
Este libro es blanco.	2 es menor que 3.	

En repetidas ocasiones usaremos frases en español como referentes intuitivos para la exploración de este lenguaje artificial. Sin embargo, no debemos perder de vista que dicho lenguaje no tiene significados para sus frases y se debe tratar como un álgebra.

En este sentido, podríamos hacer las siguientes asociaciones dado que las afirmaciones del ejemplo 1.1.2 pueden ser verderas o falsas, sin serlo simultáneamente:

p : 'Este libro es blanco.'

q : 'Fumar es dañino.'

r : 'Las funciones son relaciones.'

s : '2 es menor que 3.'

t : '2^2 es igual a 9.'

Para la lógica clásica existen sólo dos valoraciones: verdadero (V) y falso (F). Estas son llamadas valores de verdad. Seguramente al leer las proposiciones q, r, s y t hemos asignado (V) a q, r y s y (F) a t, pero ésta es sólo una posibilidad para estas proposiciones. Dicha asignación se llama *valuación*. Por el contrario, si leemos la proposición p la asignación variará dependiendo de qué libro tenemos a la mano. Esto sucede porque estas proposiciones tienen significado para nosotros y las podemos ubicar en un contexto en el que podemos decidir su valor de verdad.
Pero si decimos que a, b, c y d son proposiones no sabremos tomar la misma decisión. Por eso en lógica es tan importante que las proposiciones carezcan de significado, puesto que no debe haber una valuación predilecta si no que deben ser consideradas todas las valuaciones.

Definición 2. Una valuación es una asignación de valores de verdad a un conjunto de proposiciones. Como dicha asignación da un único valor de verdad a cada proposición, una valuación es una función de un conjunto de proposiciones al conjunto $\{V, F\}$. Así un ejemplo de valuación sería:

$$\begin{aligned} v : \{p, q, r, s\} &\longrightarrow \{V, F\} \\ p &\longmapsto v(p) = V \\ q &\longmapsto v(q) = F \\ r &\longmapsto v(r) = F \\ s &\longmapsto v(s) = V \end{aligned}$$

Una representación de la valuación v mas práctica:

Proposiciones	p	q	r	s
Valuación v	V	F	F	V

Una tabla de verdad presenta todas las posibles valuaciones de un conjunto de proposiciones.

Ejemplo 1.1.3.

	p	q
v_1	V	V
v_2	V	F
v_3	F	V
v_4	F	F

	p	q	r
v_1	V	V	V
v_2	V	V	F
v_3	V	F	V
v_4	F	V	V
v_5	F	F	V
v_6	F	V	F
v_7	V	F	F
v_8	F	F	F

Cada reglón corresponde a una valuación. En la tabla de la izquierda listamos las 4 valuaciones posibles para el conjunto de proposiciones $\{p, q\}$ y nombramos v_1 a la primera valuación, v_2 a la segunda y así sucesivamente. En la tabla de la derecha listamos las 8 posibles valuaciones del conjunto de proposiciones $\{p, q, r\}$ nombrandolas $v_1, v_2, ...v_8$. En adelante omitiremos este nombramiento de valuaciones y deberemos entender que cada reglón corresponde a una realidad diferente a la presentada en cualquier otro reglón.

Ejercicios 1.1.1.

1. Determine cuantos reglones tiene una tabla de verdad para un conjunto de n proposiciones. *Ayuda: determine el número de valuaciones para n=4,5,6 y de allí concluya una generalidad.*

2. Diga cuáles de las siguientes frases pueden ser consideradas proposiciones:

a) x es par.
b) 2 es par.
c) $x > 2$.
d) $1 > 2$.
e) $a = b$.
f) $x^2 + 2x + 1 = 0$.
g) $1^2 + 2(1) + 1 = y$.
h) $1^2 + 2(1) + 1 = 0$.

1.2. Conectivos y tablas de verdad

A partir de un conjunto de proposiciones podemos construir en el lenguaje lógico unas nuevas proposiciones usando los conectivos $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow\}$. El valor de verdad de éstas depende del valor de verdad de las proposiciones originales.

Los conectivos son operadores sobre el conjunto de las proposiciones. Específicamente, el conectivo $\neg$ es un operador unario. Esto significa que si p es una proposición, entonces $\neg p$ es una nueva proposición. Los demás conectivos son binarios, lo cual significa que si p y q son proposiciones entonces podemos construir las nuevas proposiciones:

Negación: $\neg p$ **Conjunción:** $p \wedge q$ **Implicación:** $p \rightarrow q$
Disyunción: $p \vee q$ **Bicondicional:** $p \leftrightarrow q$

Dado que éstas son ya proposiciones podemos repetir el proceso y crear otras nuevas proposiciones, como por ejemplo

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \qquad\qquad [(\neg r) \wedge s] \leftrightarrow (p \vee q)$$

Fórmulas es el nombre usual de estas nuevas proposiciones; en realidad, *fórmula* nombra a toda proposición. Así que para hablar en general diremos *fórmula* y para diferenciar, diremos proposición simple para p, q, r, s y compuestas para las obtenidas mediante conectivos. Representaremos las *fórmulas* (proposiciones compuestas y simples) con letras griegas $\phi, \psi, \alpha, \beta, ...$

Para evitar el uso excesivo de paréntesis nos ceñiremos al siguiente orden de precedencia

Conectivo	Orden
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Aplicando el orden de precedencia a la fórmula $[(\neg r) \wedge s] \leftrightarrow (p \vee q)$ llegamos a la fórmula $\neg r \wedge s \ \leftrightarrow \ p \vee q$ que expresa lo mismo. En el otro sentido, para el caso de una fórmula que no tiene paréntesis como $\neg p \rightarrow s \wedge \neg t$ la lectura correcta usando paréntesis es $(\neg p) \rightarrow [s \wedge (\neg t)]$ y una lectura incorrecta sería $\neg[(p \rightarrow s) \wedge (\neg t)]$.

En cualquier situación es recomendable quitar sólo los paréntesis que permitan una mejor lectura y no necesariamente todos los paréntesis que se pueden quitar usando precedencia. Por ejemplo, para la fórmula $[(\neg r) \wedge s] \leftrightarrow (p \vee q)$ la mejor escritura sería $(\neg r \wedge s) \leftrightarrow (p \vee q)$, pues hace muy fácil su lectura.

Ahora ya que tenemos las nuevas proposiciones o fórmulas, nuestro interés principal es determinar qué lectura tienen y cuales son los valores de verdad de éstas a partir de los valores de verdad de las proposiciones simples que las componen. Es decir, queremos saber el significado de estas fórmulas y sus tablas de verdad.

Las siguientes son las definiciones de las fórmulas más simples, obtenidas por medio de conectivos y proposiciones simples. Incluyen significado y tabla verdad. Lo siguiente es obtener las tablas de verdad para fórmulas más complicadas.

Definición 3.

Negación: La proposición $\neg p$ afirma 'no se cumple p' o de forma más rigurosa 'no p'. La tabla a continuación muestra la relación entre los valores de verdad de p y los de $\neg p$.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Conjunción: La proposición $p \wedge q$ afirma 'se cumple p y se cumple q' o mejor 'p y q'.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción: La proposición $p \vee q$ afirma 'se cumple p o se cumple q' o mejor 'p o q'.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Para esta fórmula cada una de las proposiciones simples que la conforman p, q se llama diyunto.

Implicación: La proposición $p \rightarrow q$ afirma 'si se cumple p entonces se cumple q' o mejor 'p entonces q'.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En esta fórmula tenemos varias maneras de nombrar a p y q.

p	$\longrightarrow$	**q**
Antecedente		Consecuente
Premisa		Conclusión
Condición suficiente		Condición necesaria

Bicondicional: La proposición $p \leftrightarrow q$ afirma 'se cumple p si y sólo si se cumple q', o 'p y q se cumplen o no se cumplen simultáneamente', o mejor ' p si y sólo si q'.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Antes de continuar con las tablas de verdad para proposiciones más complejas, trataremos de aclarar la tabla de verdad de la implicación con la ayuda de un ejemplo. La proposición 'Si yo, Helena, soy elegida rectora entonces bajaré el precio de las matrículas' es una implicación $p \rightarrow q$. Las proposiciones p y q se definen como p :'Yo, Helena, soy elegida rectora' y q :'Yo, Helena, bajaré el precio de las matrículas'. Ahora reflexionemos acerca de las posibles valuaciones de p y q, y respondamos a la pregunta de si Helena mintió al hacer esa afirmación.

En el caso en que p y q sean verdaderas, es decir Helena ha sido elegida rectora y ha bajado el precio de las matrículas ¿Helena mintió? No. Luego la implicación es verdadera.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V

En el caso en que p sea verdadera y q sea falsa, es decir Helena fue elegida rectora y no bajó el precio de las matrículas ¿Helena mintió? Si. Luego la implicación es falsa.

p	q	$p \rightarrow q$
V	F	F

En el caso en que p es falsa, es decir Helena no fue elegida rectora ¿Tiene Helena alguna obligación con la disminución del precio de las matrículas? Podríamos argumentar que a Helena no le fue dada la facultad de hacerlo, así que ella no tiene obligación alguna, y que por lo tanto no mintió. Luego la implicación en ese caso sería verdadera. Sin embargo, esto es una postura filosófica que depende del ejemplo. Podríamos también argumentar que una persona comprometida debe de todos modos trabajar por lo que defiende. En realidad es una decisión de la lógica con que se trabaje. En la lógica clásica, que es la lógica que estudiaremos, la postura que se adopta es la práctica: si no me eligen no me comprometo.

p	q	$p \rightarrow q$
F	V	V
F	F	V

Para hallar la tabla de verdad de una proposición más compleja se siguen los pasos siguientes. Iremos ilustrando el proceso con la fórmula $(\neg r \wedge s) \leftrightarrow (r \vee s)$.

Paso 1: Encabezamos la tabla por todas las subfórmulas de izquierda a derecha siguiendo el orden de precedencia, empezando por las proposiciones simples.

r	s	$\neg r$	$\neg r \wedge s$	$r \vee s$	$(\neg r \wedge s) \leftrightarrow (r \vee s)$

Paso 2: Listamos todas las posibles valuaciones de las proposiciones simples.

r	s	$\neg r$	$\neg r \wedge s$	$r \vee s$	$(\neg r \wedge s) \leftrightarrow (r \vee s)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Paso 3: Con la ayuda de las tablas de verdad definidas para los conectivos obtenemos los valores de verdad de izquierda a derecha de la tabla.

r	s	$\neg r$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	V

r	s	$\neg r$	$\neg r \wedge s$
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

r	s	$\neg r$	$\neg r \wedge s$	$r \vee s$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

r	s	$\neg r$	$\neg r \wedge s$	$r \vee s$	$(\neg r \wedge s) \leftrightarrow (r \vee s)$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

Definición 4.

Una fórmula cuyo valor de verdad es (V) para todas las valuaciones de las proposiciones simples, se llama tautología.

Una fórmula cuyo valor de verdad es (F) para todas las valuaciones de las proposiciones simples, se llama contradicción.

Una fórmula es una contingencia si no es tautología ni contradicción. Es decir, una contingencia tiene para alguna valuación el valor de verdad (V) y para otra (F).

Ejemplo 1.2.1.

La fórmula $(\neg r \wedge s) \leftrightarrow (r \vee s)$ es una contingencia, tal y como lo muestra la tabla de verdad que construimos arriba.

La fórmula $p \to (q \to p)$ es una tautología

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

La fórmula $p \wedge \neg(q \to p)$ es una contradicción

p	q	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$p \wedge \neg(q \to p)$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F

1.2.1. Consistencia

Un conjunto de fórmulas es consistente si existe alguna valuación de las proposiciones simples para la que cada fórmula sea verdadera. Esto significa que es posible cumplir simultáneamente cada una de las afirmaciones que éstas representan. En caso contrario se dice que el conjunto de fórmulas es inconsistente.

Habiendo desarrollado ya algunos ejercicios con tablas de verdad podemos decidir la consistencia de un conjunto de fórmulas sin necesidad de construir toda la tabla.

Ejemplo 1.2.2.

Probemos que el conjunto de fórmulas $\{p \leftrightarrow q, q \to r, \neg r \vee s, \neg p \to s, \neg s\}$ es inconsistente. Podemos escribir la tabla de verdad que involucre las 4 variables con las 16 valuaciones posibles para encontrar que ninguna permite que las 5 fórmulas sean verdaderas simultáneamente. O podemos seguir el siguiente razonamiento. Si $\neg s$ debe ser verdadera entonces s debe ser falsa.

p	q	r	s
			F

Si s es falsa, como $\neg p \to s$ debe ser verdadera entonces $\neg p$ debe ser falsa. Por lo tanto p debe ser verdadera.

p	q	r	s
V			F

De nuevo si s es falsa, como $\neg r \vee s$ debe ser verdadera, $\neg r$ debe ser verdadera. Es decir r debe ser falsa.

p	q	r	s
V		F	F

Solo falta por determinar la veracidad de las fórmulas $p \leftrightarrow q$ y $q \rightarrow r$. Para que $p \leftrightarrow q$ sea verdadera q debe ser verdadera.

p	q	r	s
V	V	F	F

Pero esta valuación hace a la fórmula $q \rightarrow r$ falsa. Y por otro lado si queremos que $q \rightarrow r$ sea verdadera, entonces q debe ser falsa.

p	q	r	s
V	F	F	F

Lo cual hace la fórmula $p \leftrightarrow q$ falsa. Es decir el conjunto es inconsistente.

Ejercicios 1.2.1.

I. Halle las tablas de verdad de las siguientes fórmulas y diga si son contingencias, tautologías o contradicciones.

1. $(\neg q \rightarrow \neg p) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
2. $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
3. $p \rightarrow p \wedge q$
4. $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg q$
5. $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg r \wedge \neg q$
6. $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
7. $((d \vee e) \wedge f) \rightarrow g$
8. $(f \rightarrow g) \rightarrow (h \rightarrow i)$
9. $((x \wedge y) \wedge z) \rightarrow a$
10. $(\neg z \rightarrow a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c)$
11. $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$
12. $\neg f \rightarrow (h \rightarrow \neg g)$
13. $\neg p \wedge p$
14. $(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow \neg s$
15. $p \wedge q \rightarrow p$
16. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
17.$(\neg i \vee \neg h) \rightarrow \neg\neg g$
18. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
19. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
20. $(a \rightarrow d) \rightarrow (f \leftrightarrow g)$
21. $(z \rightarrow z) \rightarrow (a \rightarrow a)$
22. $(\neg p \leftrightarrow z \wedge q)$
23$(a \wedge b \rightarrow a)$

II. Determine cuales de los siguientes conjuntos son consistentes.

1. $\{r \rightarrow q, q \rightarrow \neg s, \neg r \vee \neg s, \neg q \rightarrow s, \neg s\}$
2. $\{\neg r \leftrightarrow q, q \rightarrow \neg s, \neg r \wedge \neg s, \neg q \rightarrow s, \neg s\}$
3. $\{p \rightarrow r, q \wedge \neg s, \neg r \vee \neg s, \neg p \rightarrow s\}$
4. $\{p \vee r, \neg q \wedge \neg s, \neg r, \neg s, \neg p \leftrightarrow s\}$
5. $\{\neg a \vee \neg b, b \leftrightarrow \neg c, \neg c, \neg(a \vee e), \neg e \leftrightarrow f\}$

1.3. Equivalencias

En el estudio de esta 'álgebra de la verdad' que llamamos *lógica*, usando las tablas de verdad hemos observado la verdad o falsedad de cada fórmula según la valuación asignada a sus proposiciones simples. Es importante ahora determinar qué fórmulas tienen los mismos valores de verdad para cada valuación.

Definición 5. Se dice que dos fórmulas ϕ y ψ son equivalentes, si y sólo si, tienen el mismo valor de verdad para cada una de las valuaciones de todas las proposiciones simples de las dos fórmulas. Que ϕ sea equivalente a ψ se escribe simbólicamente como $\phi \equiv \psi$.

Ejemplo 1.3.1.

Dadas ϕ : '$p \to q$' y ψ : '$\neg p \vee q$' verifiquemos que son equivalentes, es decir $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Para ello incluimos las dos fórmulas en una sola tabla de verdad. El fondo amarillo encierra los valores de verdad para la fórmula $\neg p \vee q$, y el azul los de la fórmula $p \to q$. Las letras rojas indican los valores de verdad para la primera valuación, las azules la segunda valuación, las rosadas la tercera y las verdes la cuarta.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Todo par de tautologías es equivalente, así como todo par de contradicciones, incluso si involucran proposiciones simples diferentes. Ésto sucede porque la equivalencia solo observa el comportamiento de las fórmulas respecto a su valor de verdad y porque en este nivel, a la lógica no le preocupan los significados.

Ejemplo 1.3.2.

$$\neg r \wedge r \equiv p \wedge \neg(q \to p)$$

r	p	q	$\neg r \wedge r$	$p \wedge \neg(q \to p)$
V	V	V	F	F
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F
F	V	F	F	F
V	F	F	F	F
F	F	F	F	F

$$\neg s \vee s \equiv a \to (b \to a)$$

s	a	b	$\neg s \vee s$	$a \to (b \to a)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V
F	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	F	F	V	V

La clase de las tautologías es representada por la expresión $\mathbb{V}$ y la de las contradicciones por $\mathbb{F}$. La siguiente es una lista de algunas equivalencias. Éstas se usaran luego y las llamaremos leyes de equivalencia:

LEYES DE EQUIVALENCIA

Abreviatura	**Nombre**	**Equivalencia**
1. (Iden)	Identidad	$p \wedge \mathbb{V} \equiv p$ $p \vee \mathbb{F} \equiv p$
2. (Dom)	Dominación	$p \vee \mathbb{V} \equiv \mathbb{V}$ $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$
3. (Idem)	Idempotencia	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$
4.(DN)	Doble Negación	$\neg(\neg p) \equiv p$

5. (Conm)	Conmutativas	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
6. (Aso)	Asociativas	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
7. (Dist)	Distributivas	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. (LM)	Leyes de Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
9. (Abs)	Absorción	$p \wedge (q \vee p) \equiv p$ $p \vee (q \wedge p) \equiv p$
10. (Neg)	Negación	$\neg p \vee p \equiv \mathbb{V}$ $\neg p \wedge p \equiv \mathbb{F}$
11. (IM)	Implicación Material	$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
12. (Cont)	Contrarrecíproca	$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
13. (Bic)	Bicondicional	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Estas leyes son válidas si reemplazamos las proposiciones simples p y q por fórmulas generales ϕ y ψ. Eso es lo que establece el teorema 1.3.1. Verifiquemos a continuación las leyes de dominación y una de las leyes de Morgan.

Leyes de dominación

p	$\mathbb{V}$	$p \vee \mathbb{V}$
V	V	V
F	V	V

p	$\mathbb{F}$	$p \wedge \mathbb{F}$
V	F	F
F	F	F

Ley de Morgan

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V

Para determinar si un par de fórmulas son equivalentes podemos seguir usando las tablas de verdad. Sin embargo, éstas pueden involucrar demasiadas proposiciones simples que generarían una tabla de verdad muy extensa por su número de valuaciones. Así que usaremos la lista anterior de equivalencias para brindar otra posibilidad, aprovechando las propiedades siguientes de la equivalencia.

Teorema 1.3.1.

i) *Si* $\phi \equiv \psi$ *y* $\psi \equiv \rho$ *entonces* $\phi \equiv \rho$.

ii) *Si* $\phi \equiv \psi$ *y* $\gamma \equiv \alpha$ *entonces:*

a) $\neg\phi \equiv \neg\psi$

b) $\phi \wedge \gamma \equiv \psi \wedge \alpha$

c) $\phi \vee \gamma \equiv \psi \vee \alpha$

d) $\phi \rightarrow \gamma \equiv \psi \rightarrow \alpha$

e) $\phi \leftrightarrow \gamma \equiv \psi \leftrightarrow \alpha$

Con este teorema podemos establecer las mismas equivalencias listadas antes usando fórmulas en general. Por ejemplo la ley conmutativa se escribiría así:

Abreviatura	**Nombre**	**Equivalencia**
(Conm)	Conmutativa	$\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$ $\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$

No es necesario reescribir todas las leyes. Sin embargo, serán esas leyes generales las que usaremos en adelante.

A continuación mostramos algunos ejemplos del uso de las reglas de equivalencia.

Ejemplo 1.3.3.

Probemos que $\neg(\neg p \rightarrow \neg q) \equiv q \wedge \neg p$ sin usar la tabla de verdad. Las abreviaturas a la derecha indicarán la ley que se usó en el reglón respectivo.

$$\begin{aligned}
\neg(\neg p \rightarrow \neg q) &\equiv \neg[\neg(\neg q) \rightarrow \neg(\neg p)] && (Cont)\\
&\equiv \neg[q \rightarrow p] && (DN)\\
&\equiv \neg[\neg q \vee p] && (IM)\\
&\equiv \neg(\neg q) \wedge \neg p && (LM)\\
&\equiv q \wedge \neg p && (DN)
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.4.

Veamos que $\neg(p \wedge s) \wedge (m \rightarrow r) \equiv (\neg p \wedge \neg m) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg s \wedge \neg m) \vee (\neg s \wedge r)$.

$$\begin{aligned}
\neg(p \wedge s) \wedge (m \rightarrow r) &\equiv (\neg p \vee \neg s) \wedge (m \rightarrow r) && (LM)\\
&\equiv (\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg m \vee r) && (IM)\\
&\equiv [\neg p \wedge (\neg m \vee r)] \vee [\neg s \wedge (\neg m \vee r)] && (Dist)\\
&\equiv [(\neg p \wedge \neg m) \vee (\neg p \wedge r)] \vee [(\neg s \wedge \neg m) \vee (\neg s \wedge r)] && (Dist)
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.5.

Probemos que $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \equiv \mathbb{V}$ sin usar la tabla de verdad. Las abreviaturas a la derecha indicarán la ley que se usó en el reglón respectivo.

$$\begin{aligned}
[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q &\equiv \neg[(p \rightarrow q) \wedge p] \vee q && (IM)\\
&\equiv \neg[(\neg p \vee q) \wedge p] \vee q && (IM)\\
&\equiv [\neg(\neg p \vee q) \vee \neg p] \vee q && (LM)\\
&\equiv [\neg(\neg p \vee q)] \vee (\neg p \vee q) && (Asoc)\\
&\equiv [\neg(\neg p) \wedge \neg q] \vee (\neg p \vee q) && (LM)\\
&\equiv [p \wedge \neg q] \vee (\neg p \vee q) && (DN)\\
&\equiv [p \vee (\neg p \vee q)] \wedge [\neg q \vee (\neg p \vee q)] && (Dist)\\
&\equiv [(p \vee \neg p) \vee q] \wedge [\neg q \vee (\neg p \vee q)] && (Asoc)\\
&\equiv [\mathbb{V} \vee q] \wedge [\neg q \vee (\neg p \vee q)] && (Neg)\\
&\equiv \mathbb{V} \wedge [\neg q \vee (\neg p \vee q)] && (Dom)\\
&\equiv \mathbb{V} \wedge [\neg q \vee (q \vee \neg p)] && (Conm)\\
&\equiv \mathbb{V} \wedge [(\neg q \vee q) \vee \neg p] && (Asoc)\\
&\equiv \mathbb{V} \wedge [\mathbb{V} \vee \neg p] && (Neg)\\
&\equiv \mathbb{V} \wedge \mathbb{V} && (Dom)\\
&\equiv \mathbb{V} && (Iden)
\end{aligned}$$

Podemos inferir del teorema 1.3.1 parte i) que la primera fórmula es equivalente a la última. Además, en todos lo reglones hemos usado cada una de las propiedades de la parte ii). En particular en el reglón resaltado con colores hemos usado $a), b)$ y $c)$ de ese numeral del teorema, para aplicar la ley distributiva general. Hemos resaltado con amarillo la fórmula que se distribuye en la conjunción de las fórmulas azules.

En el ejemplo anterior sólo aparecen las 2 proposiciones simples p y q. Por lo tanto, es cierto que es más simple hacer la tabla de verdad. En el siguiente ejemplo hay 5 proposiciones simples p, q, r, s y t, luego una tabla de verdad tendría 32 valuaciones, y habría que completar 16 columnas.

Probaremos entonces la siguiente equivalencia:

Ejemplo 1.3.6. $[(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge r)] \wedge (s \vee t) \equiv (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge t) \vee (p \wedge r \wedge t)$

$$
\begin{aligned}
[(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge r)] \wedge (s \vee t) &\equiv [\neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge r)] \wedge (s \vee t) && (IM)\\
&\equiv [(\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (p \wedge r)] \wedge (s \vee t) && (LM)\\
&\equiv \boxed{[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]} \wedge (s \vee t) && (DN)\\
&\equiv \{\boxed{[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]} \wedge s\} \vee \{\boxed{[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]} \wedge t\} && (Dist)\\
&\equiv \{[(p \wedge q) \wedge s] \vee [(p \wedge r) \wedge s]\} \vee \{[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge t\} && (Dist)\\
&\equiv [(p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge s)] \vee \{[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \wedge t\} && (Asoc)\\
&\equiv [(p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge s)] \vee [(p \wedge q \wedge t) \vee (p \wedge r \wedge t)] && (Dist)(Asoc)\\
&\equiv (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge t) \vee (p \wedge r \wedge t) && (Asoc)
\end{aligned}
$$

En todos los cursos de matemáticas este uso de la equivalencia lógica es una de las herramientas de deducción. La idea es usar alguna expresión equivalente a la enunciada en algún teorema, definición o demostración para lograr lo que se desea. Emplearemos este recurso en la aplicación y demostración de teoremas y para nuestro caso en la sección de traducción.

Ejercicios 1.3.1.

I. Complete la tabla de verdad que prueba cada la ley de equivalencia.

1. $(Iden)$.	2. (Dom).	3. $(Idem)$.	4. (DN).	5. $(Conm)$.
6. (Aso).	7. $(Dist)$.	8. $(Dist)$.	9. (LM).	10. (Abs).
11. (Neg).	12. $(Cont)$.	13. (Bic).		

II. Reescriba las leyes de equivalencia usando fórmulas generales α, β y δ.

1.	$\alpha : `a \rightarrow b \wedge c'$	$\beta : `c \vee a'$	$\delta : `a \vee b \vee c'$.
2.	$\alpha : `c \leftrightarrow (x \wedge y)'$	$\beta : `x \vee (r \wedge z)'$	$\delta : `z \rightarrow y'$.
3.	$\alpha : `(\neg u \leftrightarrow (n \wedge p)'$	$\beta : `(\neg s \vee n) \wedge \neg m'$	$\delta : `q \wedge \neg p'$.
4.	$\alpha : `(\neg u \leftrightarrow v) \wedge t)'$	$\beta : `\neg u \wedge v \wedge \neg t'$	$\delta : `\neg t \wedge \neg v'$.
5.	$\alpha : `\neg(a \leftrightarrow (b \wedge c))'$	$\beta : `\neg((c \vee d) \wedge \neg e)'$	$\delta : `\neg((c \rightarrow \neg d) \vee e)'$.

III. Halle alguna fórmula equivalente para cada una de las siguientes tal que sólo contenga los conectivos $\neg, \wedge, \vee$.

1. $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
2. $((d \vee e) \wedge f) \rightarrow g$
3. $(f \rightarrow g) \rightarrow (h \rightarrow i)$

4. $((x \wedge y) \wedge z) \rightarrow a$
5. $(\neg z \rightarrow a \wedge b) \rightarrow (b \rightarrow c)$
6. $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$
7. $\neg f \rightarrow (h \rightarrow \neg g)$
8. $(\neg i \vee \neg h) \rightarrow \neg\neg g$
9. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
10. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
11. $(a \rightarrow d) \rightarrow (f \leftrightarrow g)$
12. $(z \rightarrow z) \rightarrow (a \rightarrow a)$
13. $(\neg p \leftrightarrow z \wedge q) \leftrightarrow (a \wedge b \rightarrow a)$
14. $\neg p \rightarrow [\neg(r \vee z) \wedge q \wedge (s \wedge t \leftrightarrow a)]$
15. $c \vee p \leftrightarrow [(r \vee z \rightarrow q) \rightarrow (s \wedge t \wedge a)]$
16. $[(r \vee z \rightarrow q) \rightarrow (s \wedge t \wedge a)] \rightarrow c \vee p$

IV. Verifique si cada una de las siguientes equivalencias es cierta. Comience usando las equivalencias lógicas y el teorema 1.3.1. Si la equivalencia se cumple podrá concluir todos los pasos como en los ejemplos anteriores. Si la equivalencia no parece cierta use las tablas de verdad.

1. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \equiv (p \wedge q \rightarrow r)$
2. $\neg[p \rightarrow (q \rightarrow p)] \equiv \mathbb{F}$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \equiv \mathbb{V}$
4. $(p \rightarrow q) \equiv (q \rightarrow p)$
5. $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \rightarrow \neg q)$
6. $\neg\{[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p\} \equiv \mathbb{F}$
7. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)] \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg q \vee \neg p \vee r$
8. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv \mathbb{V}$
9. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q) \equiv \mathbb{V}$
10. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
11. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
12. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
13. $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$
14. $a \rightarrow (b \rightarrow c) \equiv a \wedge b \rightarrow c$
15. $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge r) \equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

1.3.1. Formas Normales

De acuerdo con las reglas de implicación material y bicondicional, podemos escribir para toda fórmula otra equivalente que solo use los conectivos $\wedge, \vee$ y $\neg$. De eso se trataban los últimos ejercicios de la sección anterior. Esto significa que podríamos trabajar en lógica sólo con estos conectivos. Sin embargo, esta elección haría mas dificil el estudio de la lógica, así que se trabaja con todos los conectivos para facilitar la lectura y la escritura de los argumentos.

No obstante, para el lenguaje algorítmico en sistemas, la escritura con sólo esto tres conectivos facilila programación. Por esta razón y para practicar el manejo de las reglas de equivalencia, trabajaremos un poco las formas normales.

Las formas normales de una fórmula son otras fórmulas equivalentes a ésta que son conjunciones o disyunciones de *términos*. Ésto siginifica que contamos básicamente con dos tipos de formas normales: conjuntiva y disyuntiva. Nos detendremos entonces a dar las definiciones necesarias para las formas normales.

Definición 6.

Un *término* es una proposición simple o la negación de una proposición simple.

Ejemplo 1.3.7.

$p, \neg q, r, \neg r$ son ejemplos de términos. $p \vee \neg r$ no es un término.

Definición 7. Una *clausula* es un término o una disyunción de términos. Una *clausula dual* es un término o una conjunción de términos.

En el ejemplo a continuación listaremos una serie de fórmulas e indicaremos que tipo de clausula es.

Fórmula	**Clausula**	**Clausula Dual**	**# de Términos**
$\neg p$	Si	Si	1
$r \vee \neg s \vee t$	Si	No	3
$m \wedge \neg n$	No	Si	2
$p \wedge (r \vee \neg t)$	No	No	3

Definición 8.

Una *forma normal conjuntiva (FNC)* es una clausula o una conjunción de clausulas. Una *forma normal disyuntiva (FND)* es una clausula dual o una disyunción de clausulas duales.

Haremos de nuevo una tabla de ejemplos e indicaremos si son formas normales conjutivas, disyuntivas y el número de clausulas y términos.

Ejemplo 1.3.8.

#	**Fórmula**	**FNC**	**# Términos**	**FND**	**# Términos**
1)	$\neg p$	Clausula 1: $\neg p$	1	Clausula dual 1: $\neg p$	1
2)	$r \vee \neg s \vee t$	Clausula 1: $r \vee \neg s \vee t$	3	Clausula dual 1: r Clausula dual 2: $\neg s$ Clausula dual 3: t	1 1 1
3)	$m \wedge \neg n$	Clausula 1: m Clausula 2: $\neg n$	1 1	Clausula dual 1:$m \wedge \neg n$	2
4)	$p \wedge (r \vee \neg t)$	Clausula 1: p Clausula 2: $r \vee \neg t$	1 2	No	
5)	$(\neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q)$	No		Clausula dual 1: $\neg r \wedge s$ Clausula dual 2:$p \wedge \neg q$	2 2

#	**Fórmula**	**FNC**	**# Términos**	**FND**	**# Términos**
6)	$(\neg p \vee r \vee q) \wedge s \wedge t$	Clausula 1:$\neg p \vee r \vee q$ Clausula 2: s Clausula 3: t	3 1 1	No	
7)	$(q \wedge s) \vee (r \vee \neg t)$	No		Clausula dual 1:$q \wedge s$ Clausula dual 2:r Clausula dual 3:$\neg t$	2 1 1

Para el primer ejemplo la tabla indica que se trata de una (FNC) con una clausula de un término, y que también es una (FND) con una clausula dual de un término. Para el ejemplo 2 la tabla dice que es una (FNC) de una clausula de tres términos y que también es una (FND) con tres clausulas duales de un término. Para el ejemplo 7 la tabla indica que no es una (FNC), pero que si es una (FND) de tres clausulas duales: la primera de dos términos y la otras de un término cada una. En cuanto a esta última debemos tener en cuenta que la fórmula $(q \wedge s) \vee (r \vee \neg t)$ también puede escribirse como $(q \wedge s) \vee r \vee \neg t$, gracias a la propiedad asociativa de la disyunción

Teorema 1.3.2.

Toda fórmula α es equivalente a una (FNC) y también a una (FND).

Dada una fórmula α seguiremos los siguientes pasos para encontrar sus formas normales:

Paso 1:
Aplicar la reglas de bicondicional (Bic) e implicación material (IM) a la fórmula α obteniendo así una fórmula α_1.

Paso 2:
Aplicar la reglas de doble negación (DN), de Morgan (LM) a la fórmula α_1 obteniendo así una fórmula α_2.

Paso 3:
Aplicar la ley distributiva $(Dist)$ a la fórmula α_2 obteniendo así una fórmula α_3.

Paso 4:
Es posible que sea necesario aplicar varias veces la distribución, y que incluso se requieran otras reglas como $(Iden), (Idem), (LN)$.

El anterior es un esquema general del procedimiendo, pues el paso 4 puede incluir algunas otras reglas. Sin embargo, los tres primeros pasos serán necesariamente aplicados.

Ejemplo 1.3.9.

Las fórmulas resaltadas con amarillo corresponden a (FND) y la fórmula resaltada con verde a (FNC).

$$
\begin{aligned}
[(p \to q) \wedge (p \wedge q \to r)] \to (p \to r) &\equiv \neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q) \vee r))] \vee (\neg p \vee r) && (IM)\\
&\equiv \neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)] \vee \neg p \vee r && (LM)(Asoc)\\
&\equiv [(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \vee \neg p \vee r && (LM)(DN)\\
& && (Asoc)\\
&\equiv [(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q)] \vee \neg p \vee r && (Conm)\\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee [(p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee r] && (Asoc)\\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee [(p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)] && (Dist)\\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee [\mathbb{V} \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)] && (Neg)(Dom)\\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg q \vee \neg p \vee r) && (Iden)\\
&\equiv (p \vee \neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (q \vee \neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee \neg p \vee r) && (Dist)\\
& && (Asoc)
\end{aligned}
$$

Ejercicios 1.3.2.

I. Halle las formas normales para las fórmulas siguientes e indique cuántas clausulas o clausulas duales tienen, y de cuántos terminos cada una.

1. $(p \to q)$
2. $[b \to (c \to d)]$
3. $(e \wedge q \to f)$
4. $(\neg h \vee \neg g) \to (h \wedge r)$
5. $(i \wedge j \wedge k) \vee (i \wedge j \wedge \neg k) \vee (l \wedge \neg m \wedge n)$
6. $\neg[n \to (q \to n)]$
7. $(t \to q) \to (\neg q \to \neg t)$

8. $(\neg p \to \neg q)$
9. $\neg\{[(u \to q) \to u] \to u\}$
10. $[p \to (v \to w)] \to [(p \to v) \to (p \to w)]$
11. $(f \wedge g \wedge \neg h) \vee \neg g \vee \neg f \vee h$
12. $[(h \to m) \wedge (m \to s)] \to (h \to s)$
13. $(s \to q) \to (s \to s \wedge q)$
14. $(a \to q) \wedge (a \to r)$
15. $p \to (m \wedge t)$
16. $k \to (l \vee r)$
17. $(s \to r) \wedge (t \to r)$
18. $(p \vee q) \to r$

1.4. Reglas de inferencia

La inferencia es herramienta y objetivo en el quehacer matemático, así que en cualquier curso su presencia es evidente. Las reglas de inferencia son implicaciones que a su vez son tautologías. Por lo tanto se usan para inferir en las argumentaciones, en particular las matemáticas o demostraciones.

Ejemplo 1.4.1.

$p \wedge q \to p$

Lo que llamamos reglas de inferencia es sólo una lista de implicaciones tautológicas que son suficientes para hacer inferencia en esta lógica clásica. Sin embargo, las reglas de inferencia no se presentan en la forma usual de las implicaciones. Frecuentemente se presentan en una forma más versátil, la de los argumentos.

Definición 9.

Un argumento es una implicación de la forma $(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 ... \wedge \phi_n) \to \beta$ presentada en la forma

$$\begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \hline \therefore \beta \end{array}$$

Las fórmulas $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_n$ son las premisas del argumento y la fórmula β es la conclusión. El símbolo $\therefore$ significa 'por lo tanto' y el argumento se lee: 'si ϕ_1 y ϕ_2 y ... ϕ_n se cumplen, por lo tanto se debe cumplir β'.

El argumento se llama válido si la implicación que representa es tautológica. De lo contrario es inválido o no válido.

Recordemos que una implicación es verdadera cuando su premisa es falsa o cuando su premisa es verdadera y la conclusión también es verdadera. En términos del argumento, ésto significa que el argumento es válido cuando al ser todas las premisas verdaderas la conclusión es también verdadera, o cuando las premisas forman un conjunto de fórmulas no consistentes. Es decir, cuando sea necesario hacer la prueba, si las premisas son inconsistentes sabremos que el argumento es válido y si no lo son entonces debemos suponerlas verdaderas y llegar a que la conclusión es verdadera. Listaremos entonces las reglas de inferencia que por ser implicaciones tautológicas corresponden a argumentos válidos. A la derecha aparecen las implicaciones tautológicas correspondientes.

Abreviatura	**Nombre**	**Regla**	**Implicación Tautológica**
$(Simp)$	Simplificación	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$	$p \wedge q \rightarrow p$
$(Conj)$	Conjunción	$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$	$p \wedge q \rightarrow p \wedge q$
$(Adic)$	Adición	$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	$p \rightarrow p \vee q$
(MP)	Modus Ponens	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
(MT)	Modus Tollens	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
(Abs)	Absorción	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \hline \therefore p \rightarrow p \wedge q \end{array}$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p \wedge q)$
(Dil)	Dilema	$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \\ p \vee r \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)$

(SH)	Silogismo Hipotético	$p \to q$ $q \to r$ ——— $\therefore p \to r$	$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
(SD)	Silogismo Disyuntivo	$p \vee q$ $\neg p$ ——— $\therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$
(Res)	Resolución	$p \vee q$ $\neg p \vee r$ ——— $\therefore q \vee r$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \to (q \vee r)$
(Ded)	Deducción	$p \to q$ $p \wedge q \to r$ ——— $\therefore p \to r$	$[(p \to q) \wedge (p \wedge q \to r)] \to (p \to r)$

Para probar que cada una de las reglas de inferencia corresponde a una implicación tautológica, basta con usar uno de los métodos para determinar equivalencias. Por ejemplo mostraremos la regla de Deducción:

$$
\begin{aligned}
[(p \to q) \wedge (p \wedge q \to r)] \to (p \to r) &\equiv \neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q) \vee r))] \vee (\neg p \vee r) && (IM)\\
&\equiv \neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)] \vee \neg p \vee r && (LM)(Asoc)\\
&\equiv [(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)] \vee \neg p \vee r && (LM)(DN)\\
& && (Asoc)\\
&\equiv [(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q)] \vee \neg p \vee r && (Conm)\\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee [(p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee r] && (Asoc)\\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee [(p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)] && (Dist)\\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee [\mathbb{V} \wedge (\neg q \vee \neg p \vee r)] && (Neg)(Dom)\\
&\equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg q \vee \neg p \vee r) && (Iden)\\
&\equiv (p \vee \neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (q \vee \neg q \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee \neg p \vee r) && (Dist)\\
& && (Asoc)\\
&\equiv \mathbb{V} \wedge \mathbb{V} \wedge \mathbb{V} && (Neg)(Dom)\\
& && (ASoc)\\
&\equiv \mathbb{V} && (Idem)
\end{aligned}
$$

Dado que todas las reglas de inferencia se pueden probar por equivalencias, por el teorema 1.3.1 cada una puede reescribirse con fórmulas en general. Por ejemplo, si reescribimos la regla de la deducción obtenemos:

Abreviatura	**Nombre**	**Regla**	**Implicación Tautológica**
(Ded)	Deducción	$\phi \to \psi$ $\phi \wedge \psi \to \gamma$ ——— $\therefore \phi \to \gamma$	$[(\phi \to \psi) \wedge (\phi \wedge \psi \to \gamma)] \to (\phi \to \gamma)$

Lo más importante de las reglas de inferencia es su uso para la demostración de otros argumentos más complejos. Así que reescribirlas para fórmulas es un ejercicio para quien quiera hacerlo.

Observación 1.
A diferencia de las reglas de equivalencia que se pueden aplicar a subfórmulas, las reglas de inferencia se aplican a una fórmula completa no a sus subfórmulas. Veamos un ejemplo:

Regla de equivalencia: (IM)

$(p \to q) \land r \equiv (\neg p \lor q) \land r$

Regla de inferencia: (MP)

$$\begin{array}{l} (p \to q) \land r \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

La regla de la izquierda está correctamente aplicada, pero la de la derecha es incorrecta, puesto que la fórmula no es una implicación con antecedente p.

Ejercicios 1.4.1.

I. Reescriba las reglas de inferencia usando las fórmulas ϕ, ψ, χ y θ.

II. Reescriba las reglas de inferencia obtenidas en el numeral anterior usando las fórmulas ϕ : '$a \to b$',ψ : '$c \land \neg d$', χ : '$e \leftrightarrow f$' y θ : '$\neg g$'.

III. Las siguientes son inferencias incorrectas, indique cual es el error:

1. **Regla de inferencia: (SD)**

$$\begin{array}{l} (p \land q) \to (t \lor s) \\ \neg s \\ \hline \therefore t \end{array}$$

2. **Regla de inferencia: (Simp)**

$$\begin{array}{r} (a \land b) \leftrightarrow c \\ \hline \therefore a \end{array}$$

3. **Regla de inferencia: (Adic)**

$$\begin{array}{l} t \to (t \lor s) \\ g \lor (s \land t) \\ \hline \therefore g \lor h \end{array}$$

4. **Regla de inferencia: (Conj)**

$$\begin{array}{r} (a \land b) \lor c \\ d \to e \\ \hline \therefore c \land d \end{array}$$

1.4.1. Argumentos válidos

El siguiente teorema nos permite usar las reglas de inferencia para probar la validez de otros argumentos.

Teorema 1.4.1. *Si los siguientes argumentos son válidos*

$$\begin{array}{c} \phi \\ \hline \therefore \beta \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{c} \phi \\ \beta \\ \hline \therefore \beta_1 \end{array}$$

Entonces el siguiente argumento también es válido

$$\begin{array}{c} \phi \\ \hline \therefore \beta_1 \end{array}$$

Si observamos un poco, los dos primeros argumentos válidos corresponden a que las implicaciones $\phi \to \beta$ y $\phi \wedge \beta \to \beta_1$ son tautologías. Así que aplicando la regla de inferencia (Ded) se infiere que $\phi \to \beta_1$ es una tautología. Mas generalmente, si el argumento tiene varias premisas $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_n$ y conclusión β, entonces al nombrar la conjunción de las premisas ϕ : '$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 ... \wedge \phi_n$', por el teorema 1.4.1 obtenemos que:

$$\begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \hline \therefore \beta \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \beta \\ \hline \therefore \beta_1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \hline \therefore \beta_1 \end{array}$$

Lo anterior nos permitirá hacer el siguiente tipo de prueba.

Ejemplo 1.4.2.

Veamos que el argumento que aparece a continuación es válido

Argumento	**Enumeración**	**Regla**
$\neg p \wedge q$	1. $\neg p \wedge q$	
$r \to p$	2. $r \to p$	
$\neg r \to s$	3. $\neg r \to s$	
$s \to t$	4. $s \to t / \therefore t$	
$\therefore t$	5. $\neg p$	$1.(Simpl)$
	6. $\neg r$	$5, 2(MT)$
	7. s	$6, 3(MP)$
	8. t	$7, 4(MP)$

La enumeración y la lista de reglas que aparece a la derecha conforman la prueba de validez. Los numerales del 1 al 4 corresponden a las premisas, es decir es lo que supondremos cierto. En el reglón 4 aparece la conclusión $/ \therefore t$, se escribe pero no se supone cierta, pues es lo que requiere prueba. Al escribir '5. $\neg p \quad 1.(Simpl)'$ estamos escribiendo de forma abreviada que el argumento

$$\begin{array}{c} \neg p \wedge q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

es válido según la regla de Simplificación. También es posible usar una equivalencia siempre que sea necesario. Finalmente, lo que garantiza que de las 4 premisas originales se infiere la conclusión del reglón 8 es el teorema 1.4.1.

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 1.4.3.

1. $p \to q$
2. $\neg p \to r$
3. $r \to s / \therefore \neg q \to s$

4. $\neg p \to s$	$2,3(SH)$
5. $\neg s \to \neg\neg p$	$4(Cont)$
6. $\neg s \to p$	$5(DN)$
7. $\neg s \to q$	$6,1(SH)$
8. $\neg q \to \neg\neg s$	$7(Cont)$
9. $\neg q \to s$	$8(DN)$

El argumento es el que se lista en los 3 primeros reglones, la conclusión se distingue por los símbolos $/ \therefore$. En la prueba hemos usado también equivalencias en los reglones 5,6,8 y 9.

En los siguientes ejemplos las premisas forman un conjunto de fórmulas inconsistentes. En este caso cualquier conclusión puede ser inferida, usando las reglas de Adición (Adic) y Silogismo disyuntivo (SD).

Argumento 1		**Argumento 2**		**Argumento 3**	
1. $p \to r$		1. $p \to r$		1.$p \to r$	
2. $\neg p \to q$		2. $\neg p \to q$		2. $\neg p \to q$	
3. $q \to s$		3. $q \to s$		3. $q \to s$	
4. $\neg(\neg r \to s) / \therefore s$		4. $\neg(\neg r \to s) / \therefore a$		4. $\neg(\neg r \to s) / \therefore a \to b$	
5. $\neg(\neg\neg r \vee s)$	$4(IM)$	5. $\neg(\neg\neg r \vee s)$	$4(IM)$	5. $\neg(\neg\neg r \vee s)$	$4(IM)$
6. $\neg(r \vee s)$	$5(DN)$	6. $\neg(r \vee s)$	$5(DN)$	6. $\neg(r \vee s)$	$5(DN)$
7. $\neg r \wedge \neg s$	$6(LM)$	7. $\neg r \wedge \neg s$	$6(LM)$	7. $\neg r \wedge \neg s$	$6(LM)$
8. $\neg r$	$7(Simp)$	8. $\neg r$	$7(Simp)$	8. $\neg r$	$7(Simp)$
9. $\neg p$	$8,1(MT)$	9. $\neg p$	$8,1(MT)$	9. $\neg p$	$8,1(MT)$
10. $\neg s$	$7(Simp)$ $(Conm)$	10. $\neg s$	$7(Simp)$ $(Conm)$	10. $\neg s$	$7(Simp)$ $(Conm)$
11. $\neg q$	$10,3(MT)$	11. $\neg q$	$10,3(MT)$	11. $\neg q$	$10,3(MT)$
12. $\neg\neg p$	$11,2(MT)$	12. $\neg\neg p$	$11,2(MT)$	12. $\neg\neg p$	$11,2(MT)$
13. p	$12(DN)$	13. p	$12(DN)$	13. p	$12(DN)$
14. $p \vee s$	$13(Adic)$	14. $p \vee a$	$13(Adic)$	14. $p \vee (a \to b)$	$13(Adic)$
15. s	$14,9(SD)$	15. a	$14,9(SD)$	15. $a \to b$	$14,9(SD)$

Lo primero que debemos observar es que las premisas de los tres argumentos son iguales y lo que los distingue es las 3 conclusiones diferentes: s, a y $a \to b$. En segundo lugar observamos que el conjunto de esas premisas es inconsistente. Lo tercero es que las pruebas son idénticas hasta el reglón 14. Y lo más importante, es que en el reglón 9 obtenemos la proposición $\neg p$ y en el reglón 13 p. Esto último indica de nuevo que las premisas son inconsistentes y que por lo tanto cualquier fórmula puede ser la conclusión. En otras palabras, sin importar cual sea la conclusión el argumento es válido. Esto es porque siempre que la premisa sea falsa la implicación es verdadera.

Observación 2.

Si un argumento es válido siempre será posible hacer su demostración. Recíprocamente, si se logra una demostración de un argumento es porque el argumento es válido.

Ejercicios 1.4.2.

I. Pruebe la validez de los siguientes argumentos:

1.
$$\begin{array}{l} a \vee e \\ \neg d \\ c \to d \\ b \to c \\ a \to b \\ \hline \therefore e \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l} u \to r \\ (r \wedge s) \to (p \vee t) \\ q \to (u \wedge s) \\ \neg t \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} r \to s \\ r \to \neg s \\ r \\ \hline \therefore m \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l} [y \wedge z \to a] \wedge [y \wedge b \to c] \\ (b \vee z) \wedge y \\ \hline \therefore a \vee c \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l} a \to \neg b \\ \neg(c \wedge \neg a) \\ \hline \therefore c \to \neg b \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l} j \vee (\neg j \wedge k) \\ j \to l \\ \hline \therefore (l \wedge j) \leftrightarrow j \end{array}$$

7
$$\begin{array}{l} c \to r \\ (c \wedge r) \to p \\ (c \to p) \to \neg s \\ s \vee e \\ \hline \therefore e \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l} (c \wedge m) \to d \\ d \to v \\ v \to a \\ \neg a \\ \hline \therefore m \to \neg c \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l} (o \wedge t \wedge s) \to m \\ r \to \neg m \\ t \wedge r \\ o \wedge s \\ \hline \therefore v \end{array}$$

10
$$\begin{array}{l} (p \to q) \wedge (p \vee r) \\ (r \to s) \wedge (r \vee p) \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{l} (\neg c \to w) \wedge (x \to w) \\ \neg(\neg x \wedge c) \\ \hline \therefore w \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l} (p \to s) \wedge (s \to q) \\ (q \to r) \wedge (r \to m) \\ \neg m \\ (\neg s \wedge \neg m) \to o \\ o \to p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

13.
$$\begin{array}{l} ((d \vee e) \wedge f) \to g \\ (f \to g) \to (h \to i) \\ h \\ \hline \therefore d \to i \end{array}$$

14.
$$\begin{array}{l} f \to \neg g \\ \neg f \to (h \to \neg g) \\ (\neg i \vee \neg h) \to \neg\neg g \\ \neg i \\ \hline \therefore \neg h \end{array}$$

15.
$$\begin{array}{l} (z \to z) \longrightarrow (a \to a) \\ (a \to a) \longrightarrow (z \to z) \\ \hline \therefore (a \longrightarrow a) \end{array}$$

16.
$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \hline \therefore p \wedge r \to q \wedge s \end{array}$$

17.
$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ r \leftrightarrow s \\ \hline \therefore p \wedge r \leftrightarrow q \wedge s \end{array}$$

18.
$$\begin{array}{l} r \to a \vee b \\ c \to b \vee d \\ \neg b \\ \hline \therefore (\neg a \wedge \neg d) \to (\neg r \wedge \neg c) \end{array}$$

1.4.2. Argumentos inválidos

Como un argumento representa una implicación, sabemos que no será válido si la implicación no es una tautología. Esto significa que debe existir una valuación para la que la implicación sea falsa. Entonces probar que un argumento es inválido consiste en encontrar una valuación tal que la premisa de la implicación sea verdadera y la conclusión falsa.

$$\begin{array}{l} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \hline \therefore \beta \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 ... \wedge \phi_n) \rightarrow \beta$$

Esto significa que para que la premisa de la implicación sea verdadera todas las premisas del argumento deben serlo. Y finalmente que la conclusión sea falsa.

El proceso es mas sencillo si empezamos por la conclusión. Ilustraremos el proceso con la ayuda de un ejemplo. Veamos que el siguiente argumento es inválido.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ q \rightarrow s \\ \hline \therefore r \rightarrow s \end{array}$$

Paso 1: Listamos todas las proposiciones simples del argumento.

p	q	r	s

Paso 2: Observamos qué valuación hace falsa la conclusión y anotamos los valores de verdad en la tabla. En el caso del ejemplo cuando r es verdadera y s es falsa.

p	q	r	s
		V	F

Paso 3: Dada la valuación de las proposiciones simples de la conclusión, observamos qué valuaciones de las otras proposiciones simples hacen las premisas verdaderas. Para el ejemplo, si s es falsa, para que la premisa $q \rightarrow s$ sea verdadera q debe ser falsa.

p	q	r	s
	F	V	F

Si q es falsa para que la premisa $\neg p \rightarrow q$ sea verdadera $\neg p$ debe ser falsa, es decir p debe ser verdadera.

p	q	r	s
V	F	V	F

Como p y r son verdaderas se tiene que la premisa $p \rightarrow r$ es verdadera.

Paso 4: Se revisa que la valuación encontrada haga efectivamente a las premisas verdaderas y la conclusión falsa.

Observación 3. *Si hemos encontrado una valuación para un argumento tal que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, el argumento es inválido y no habrá manera de hacer una prueba de validez. Recíprocamente, si logramos una prueba de validez de un argumento, no será posible hallar una valuación tal.*

Ejercicios 1.4.3.

I. Demuestre la invalidez de los siguientes argumentos:

1.
$$\begin{array}{l} b \to w \\ g \to \neg s \\ (\neg b \wedge \neg g) \to (c \wedge p) \\ \neg w \\ p \\ \hline \therefore c \to \neg g \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l} (i \wedge s) \to (c \wedge a) \\ (s \wedge \neg i) \to e \\ e \to a \\ i \to s \\ \hline \therefore a \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} (e \to v) \wedge (j \to \neg r) \\ (\neg e \wedge \neg j) \to (c \wedge h) \\ \neg v \\ h \\ \hline \therefore c \to \neg j \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l} ((x \wedge y) \wedge z) \to a \\ (z \to a) \to (b \to c) \\ \hline \therefore x \to c \end{array}$$

5.
$$\begin{array}{l} a \longrightarrow (b \wedge c) \\ b \longrightarrow (d \wedge e) \\ (a \to d) \longrightarrow (f \leftrightarrow g) \\ a \longrightarrow (b \to \neg f) \\ \neg f \longrightarrow (\neg g \to e) \\ \hline \therefore e \end{array}$$

6.
$$\begin{array}{l} k \longrightarrow (l \wedge m) \\ (l \longrightarrow n) \vee \neg k \\ o \longrightarrow (p \vee \neg n) \\ (\neg p \vee q) \wedge \neg q \\ (r \vee \neg p) \vee \neg m \\ \hline \therefore k \longrightarrow r \end{array}$$

7.
$$\begin{array}{l} d \longrightarrow (e \vee f) \\ g \longrightarrow (h \vee i) \\ \neg e \longrightarrow (i \vee j) \\ (i \longrightarrow g) \wedge (\neg h \longrightarrow \neg g) \\ \neg j \\ \hline \therefore d \longrightarrow (g \vee i) \end{array}$$

8.
$$\begin{array}{l} (c \wedge m) \to d \\ d \to v \\ v \to a \\ \hline \therefore m \to \neg c \end{array}$$

9.
$$\begin{array}{l} (o \wedge t \wedge s) \to m \\ r \to \neg m \\ t \wedge r \\ o \\ \hline \therefore v \end{array}$$

10.
$$\begin{array}{l} (d \wedge e \wedge f) \to g \\ (f \to g) \to (h \to i) \\ \hline \therefore d \to i \end{array}$$

11.
$$\begin{array}{l} f \to \neg g \\ \neg f \to (h \to \neg g) \\ (\neg i \vee \neg h) \to \neg\neg g \\ \hline \therefore \neg h \end{array}$$

12.
$$\begin{array}{l} (p \to s) \wedge (s \to q) \\ (q \to r) \wedge (r \to m) \\ (\neg s \wedge \neg m) \to o \\ o \to p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

1.5. Traducción

1.5.1. Traducción de Enunciados

Las teorías matemáticas usan la lógica como transfondo de su presentación, mas se enuncian en palabras para hacer amable su lectura. En esta sección traduciremos al lenguaje lógico algunos enunciados matemáticos.

Comencemos por reconocer las diferentes formas de la implicación y el bicondicional. La fórmula $p \rightarrow q$ suele aparecer escrita de las formas siguientes:

1. Si p entonces q
2. Si p, q
3. q, si p
4. q, cuando p
5. Cuando p, q
6. q, siempre que p
7. Siempre que p, q
8. q se infiere de p
9. De p se infiere q
10. p luego q
11.p. Así q
12. q dado que p
13. Dado p, se tiene q
14. p implica q
15. q se deduce de p
16. p solo si q
17. Solo p si q
18. p es suficiente para q
19. q es necesaria para p
20. p es condición suficiente para q
20. q porque p
21.Como p, concluimos q

La fórmula $p \leftrightarrow q$ suele aparecer escrita de las formas siguientes:

1. p si y solo si q
2. Solamente p es q
3. Solamente p, q
4. p es necesario y suficiente para q
5. p equivale a q
6. p es lo mismo que q
7. p significa q
8. p implica q, y recíprocamente
9. p implica q, y viceversa

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.5.1.

Enunciado: Para las igualdades $sen^2x = \frac{1-cos2x}{2}$ y $sen^2x = 1 - cos^2x$ es necesaria la igualdad $\frac{1-cos2x}{2} = 1 - cos^2x$.

Si nombramos las proposiciones como se indica a la izquierda, el enunciado anterior se traduce como aparece a la derecha.

Nombramiento:	**Traducción:**
p : ‘$sen^2x = \dfrac{1-cos2x}{2}$’	
q : ‘$sen^2x = 1 - cos^2x$’	$p \wedge q \rightarrow r$
r : ‘$\dfrac{1-cos2x}{2} = 1 - cos^2x$’	

Ejemplo 1.5.2.

Enunciado: Dado que $2 \times 17 = 34$, tenemos que 34 es par.

Nombramiento:	**Traducción:**
p : ‘$2 \times 17 = 34$’	
q : ‘34 es par’	$p \rightarrow q$

Ejemplo 1.5.3.

Enunciado: Para los números reales 27^{1548} y 71^{850} es necesaria una de las siguientes condiciones:

$$27^{1548} < 71^{850}$$
$$27^{1548} = 71^{850}$$
$$27^{1548} > 71^{850}$$

Nombramiento:	**Traducción:**
p : '27^{1548} es un número real'	
q : '71^{850}es un número real'	
r : '$27^{1548} < 71^{850}$'	$p \wedge q \rightarrow (r \vee s \vee t)$
s : '$27^{1548} = 71^{850}$'	
t : '$27^{1548} > 71^{850}$'	

Ejercicios 1.5.1.

I. Traduzca los siguientes enunciados.

1. Tenemos que $2^{\log_2 \pi} 2^{\log_2 e} = \pi e$ porque $2^{\log_2 \pi} = \pi$ y $2^{\log_2 e} = e$.
2. Que la función logaritmo natural sea inyectiva y que $\ln x = \ln y$ es condición suficiente para $x = y$.
3. Como $3 \ln \pi = \ln \pi^3$, concluimos $\ln \pi$ divide a $\ln \pi^3$.
4. Si $2^{e\pi} = 2^e 2^\pi$ y $\ln 2^{e\pi} = \ln 2^e 2^\pi$, como $\ln 2^{e\pi} = e\pi \ln 2$, inferimos que $e\pi \ln 2 = \ln 2^e 2^\pi$.
5. $\frac{1}{3} > \frac{1}{1+e^2}$ porque $\sqrt{2} < e$ y la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, 3]$.
6. Que 17 sea un número primo equivale a que sólo 1 y 17 son divisores de 17 y que $17 > 1$.
7. $[1, 5] \subseteq [0, 10]$ significa que $0 \leq 1$ y $5 \leq 10$.
8. Que 5 sea mayor que cero es condición suficiente para que 5 sea un número positivo.
9. Sólo $7 = 4$ y $7 - 4 = 4 - 4$ si $7 = 0$.
10. La función tangente es una función creciente. Así, como $e < \pi$, $\tan e < \tan \pi$.
11. Como la función coseno tiene un rango entre -1 y 1 entonces la función coseno por 2 tiene un rango entre -2 y 2.
12. -1 no pertence al dominio de la función raiz cuadrada, puesto que $\sqrt{-1}$ no es un número real.

1.5.2. Traducción de Teoremas

Aunque las demostraciones de teoremas en matemáticas incluyen razonamientos y enunciados lógicos, rara vez éstos aparecen escritos en el lenguaje formal de las secciones anteriores. Las demostraciones son argumentos cuyas premisas forman dos conjuntos: las que aparecen en el enunciado y otras que son axiomas u otros teoremas ya enunciados en la teoría, o mostrados dentro de la misma demostración. La conclusión de la demostración es el enunciado del teorema. Es decir en una demostración se logran las premisas del argumento válido que prueba el enunciado del teorema. En general, una demostración tiene el siguiente esquema:

Teorema:		ϕ_1
ϕ		ϕ_2
Demostración:	$\Leftrightarrow$	$\vdots$
$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \square$		ϕ_n
		$\therefore \phi$

La desmostración es correcta si el argumento de la derecha es un argumento válido. En síntesis, la demostración de un teorema consiste en plantear un argumento válido, cuyas premisas se prueban o se saben ciertas y cuya conclusión es el enuciado del teorema. Cuando se hace una demostración, no suele hacerse la prueba de validez del argumento válido que se planteó, pues el matemático sabe que por 'Lógica' se infiere la conclusión. Lo que haremos en esta sección es extraer de demostraciones hechas dicho argumento y probar lo que no se acostumbra probar, la validez de éste.

Los teoremas y demostraciones que enuciaremos incluyen definiciones rigurosas. No debemos preocuparnos por estas definiciones. Como lo hemos mencionado antes, a este nivel la lógica no se involucra con los significados. Lo que haremos es identificar y traducir argumentos y equivalencias.

Ejemplo 1.5.4. En este ejemplo enunciamos un teorema y indicamos las premisas que logra la demostración.

Teorema 1.5.1. *$\sqrt{2}$ no es racional.*

Demostración.

$\sqrt{2}$ es racional

Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces es un racional irreducible.

Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces es un racional reducible.

□

Luego el argumento asociado al teorema y su demostración es:

$\sqrt{2}$ es racional

Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces es un racional irreducible.

Si $\sqrt{2}$ es un racional, entonces es un racional reducible

---

$\therefore$ $\sqrt{2}$ no es racional.

La primera premisa se supone (demostración por contradicción), la segunda es un resultado de los racionales y la última se demuestra dentro de la misma demostración.

En el caso específico del ejemplo anterior, la tercera premisa requiere una demostración y esta demostración requiere primero probar que si un entero al cuadrado es par, entonces el entero mismo es par. Es por esto que los teoremas se escriben en palabras dentro de un contexto en el que estas tienen una definición matemática precisa. Adicionalmente, en estos contextos son bastante conocidos otros teoremas que suelen ser muy útiles a la hora de desarrollar la demostración. Ejemplo de estas palabras: función, relación, continuidad, derivabilidad, inyectiva, biyectiva, par, impar, reducible, racional, divisible, primo, etc.

Como nuestro interés es la estructura lógica de los enunciados y demostraciones matemáticas, nos limitaremos a hacer una traducción lógica de estos argumentos. Esta lectura es muy práctica y se desentiende de los significados y la creatividad matemática, pero nos permite seguir y aplicar los resultados matemáticos sin imbuirnos demasiado en las teorías de la matemática.

Hagamos la traducción del ejemplo anterior.

Nombramiento:

p : '$\sqrt{2}$ es racional'

q : '$\sqrt{2}$ es reducible'

Traducción:	**Prueba de validez:**	
p	$1.p$	
$p \to \neg q$	$2.p \to \neg q$	
$p \to q$	$3.p \to q / \therefore \neg p$	
———	$4.\neg q$	$1,2(MP)$
$\therefore \neg p$	$5.q$	$1,3(MP)$
	$6.q \vee \neg p$	$5(Adic)$
	$7.\neg p$	$6,4(SD)$

A la derecha aparece la prueba de validez del argumento de la demostración, la cual es muy sencilla.

La esencia real de una demostración matemática es determinar cuáles son las premisas adecuadas, probar que son ciertas y elegir el argumento lógico (método de demostración) que permitirá la prueba. De nuevo, ésto nos deja ver que en la demostración de un teorema se entrelazan varias argumentaciones lógicas; por eso es mejor su escritura en palabras. Por lo tanto, lejos de podernos eximir del razonamiento lógico estamos comprometidos a adiestrarnos en su manejo.

Como ya mencionamos, en esta sección solo nos involucraremos con la estructura lógica de las argumentaciones matemáticas y realizaremos sus pruebas de validez. Los métodos de demostración serán el tema del capitulo 3.

Los siguientes teoremas aparecen con su demostración. El ejercicio es traducir el argumento que yace en la prueba.

Ejemplo 1.5.5.

Teorema 1.5.2. *Si* 343^5 *divide a* 2744^{58} *y* 2744^{58} *divide a* 74088^{60}*, entonces* 343^5 *divide a* 74088^{60}.

Demostración.

Tenemos que $343^5(2744^{53}32768) = 2744^{58}$ y $2744^{58}(27^{58}74088^2) = 74088^{60}$; esto significa respectivamente que 343^5 divide a 2744^{58} y que 2744^{58} divide a 74088^{60}. De estas igualdades se infiere la igualdad:

$$343^5[(2744^{53}32768)(27^{58}74088^2)] = 74088^{60},$$

y esto se tiene solo si 343^5 divide a 74088^{60}. □

Nombramiento:	**Traducción:**
p : '343^5 divide a 2744^{58}'	$r \wedge s$
q : '2744^{58} divide a 74088^{60}'	$r \leftrightarrow p$
m : '343^5 divide a 74088^{60}'	$s \leftrightarrow q$
r : '$343^5(2744^{53}32768) = 2744^{58}$'	$s \wedge r \to t$
s : '$2744^{58}(27^{58}74088^2) = 74088^{60}$'	$t \to m$
t : '$343^5[(2744^{53}32768)(27^{58}74088^2)] = 74088^{60}$'	———
	$\therefore p \wedge q \to m$

La prueba de validez de este argumento usa básicamente (SH), (Adic) y (Bic), y la dejaremos como ejercicio.

Ejemplo 1.5.6.

Teorema 1.5.3. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1) π *es irracional.*

2) $3\pi + 2$ *es irracional.*

3) $\pi/2$ *es irracional.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Si $3\pi + 2$ fuera racional, entonces existirían a, b números enteros tales que $3\pi + 2 = a/b$. Pero ésto implica que $\pi = \frac{a-2b}{3b}$. Así, de ésto último se deduce que π es racional.

2) $\Rightarrow$ 3) Si suponemos que $\pi/2$ es racional, entonces existen c, d números enteros tales que $\pi/2 = c/d$. De ésto se deduce que $3\pi + 2 = \frac{6c+2d}{d}$. Finalmente, de ésto último se deduce que $3\pi + 2$ es racional.

3) $\Rightarrow$ 1) Al suponer que π es racional, podemos inferir que existen e, f números enteros tales que $\pi = e/f$. Luego $\pi/2 = \frac{e}{2f}$. Y dada la última igualdad tenemos $\pi/2$ es racional. □

Nombramiento:	**Traducción:**
m : 'π es irracional '	$\neg n \to q$
n : '$3\pi + 2$ es irracional'	$q \to s$
o : '$\pi/2$ es irracional'	$s \to \neg m$
p : 'Existen e, f números enteros tales que $\pi = e/f$'	$\neg o \to r$
q : 'Existen a, b números enteros tales que $3\pi + 2 = a/b$'	$r \to t$
r : 'Existen c, d números enteros tales que $\pi/2 = c/d$'	$t \to \neg n$
s : 'Existen a, b números enteros tales que $\pi = \dfrac{a-2b}{3b}$'	$\neg m \to p$
t : 'Existen c, d números enteros tales que $3\pi + 2 = \dfrac{6c+2d}{d}$'	$p \to u$
u : 'Existen e, f números enteros tales que $\pi/2 = e/2f$'	$u \to \neg o$
	———————
	$\therefore (m \leftrightarrow n) \wedge (n \leftrightarrow o) \wedge (m \leftrightarrow o)$

Sabemos que las primeras tres afirmaciones son proposiciones. Si leemos la demás afirmaciones vemos que también podemos decidir si son verdaderas o falsas a pesar de que tienen variables. Estas son proposiciones donde las variables estan cuantificadas. Estudiaremos este tipo de proposiciones en el siguiente capítulo.

Ejemplo 1.5.7.

Teorema 1.5.4. $0 \cdot 3 = 0$

Demostración. Sabemos que es cierto que $0+0 = 0$ y $(0+0) \cdot 3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3$, leyes modulativa y distributiva de la suma y el producto. Entonces podemos concluir que $0 \cdot 3 = (0 + 0) \cdot 3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3$, es decir $0 \cdot 3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3$. Además, sabemos que $0 \cdot 3 - 0 \cdot 3 = 0$ y que de esta igualdad junto con la anterior se infiere $0 \cdot 3 - 0 \cdot 3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 - 0 \cdot 3$, es decir que $0 = 0 \cdot 3$ □

Nombramiento:	**Traducción:**
p : '$0 + 0 = 0$'	$p \wedge q$
q : '$(0 + 0) \cdot 3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3$'	$p \wedge q \to s$
r : '$0 \cdot 3 - 0 \cdot 3 = 0$'	r
s : '$0 \cdot 3 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3$'	$r \wedge s \to t$
t : '$0 = 0 \cdot 3$'	———————
	$\therefore t$

Ejemplo 1.5.8.

Teorema 1.5.5. *Como* $\frac{3}{4} \neq 0$ *y* π *irracional, entonces* $\frac{3\pi}{4}$ *es irracional.*

Demostración.
Solo $\frac{3\pi}{4}$ es racional si existen a, b enteros tales que $\frac{3\pi}{4} = \frac{a}{b}$. Pero como $\frac{3}{4} \neq 0$ entonces $\pi = \frac{a/b}{3/4} = \frac{4a}{3b}$. Pero finalmente esto implicaría que π es racional y sabemos que π es irracional. Luego $\frac{3\pi}{4}$ es irracional. □

Nombramiento:	**Traducción:**
p : 'π es racional'	$r \to s$
q : '$\dfrac{3}{4} \neq 0$'	q
r : '$\dfrac{3\pi}{4}$ es racional'	$q \wedge s \to t$
s : 'Existen a, b números enteros tales que $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{a}{b}$'	$t \to p$
t : 'Existen a, b números enteros tales que $\pi = \dfrac{4a}{3b}$'	$\neg p$
	______________
	$\therefore \neg r$

Ejercicios 1.5.2.

I. Pruebe la validez del argumento en el ejemplo 1.5.2.

II. Pruebe la validez del argumento en el ejemplo 1.5.3.

III. Pruebe la validez del argumento en el ejemplo 1.5.4.

IV. Pruebe la validez del argumento en el ejemplo 1.5.5.

V. Traduzca las demostraciones de los teoremas siguientes y realice la prueba de validez respectiva.

1.

Teorema 1.5.6. $\ln \pi^{100} = 100 \ln \pi$.

Demostración.
Por definición de logaritmo sabemos que $\pi = e^{\ln \pi}$. De ésto inferimos que $\pi^{100} = (e^{\ln \pi})^{100}$. Por otro lado tenemos que $(e^{\ln \pi})^{100} = e^{100 \ln \pi}$ (propiedad de la potenciación). Lo anterior es condición suficiente para obtener la igualdad $\pi^{100} = e^{100 \ln \pi}$. Si aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la igualdad inferimos $\ln \pi^{100} = \ln e^{100 \ln \pi}$. De nuevo por definición de logaritmo tenemos que $\ln(e^{100 \ln \pi}) = 100 \ln \pi$. De éstas dos últimas igualdades finalmente deducimos que $\ln \pi^{100} = 100 \ln \pi$. Por lo tanto es cierta la afirmación del teorema. □

2.

Teorema 1.5.7. $\ln 2\pi = \ln 2 + \ln \pi$.

Demostración.

Tenemos las siguientes igualdades:

(1)	$e^{\ln 2+\ln\pi} = e^{\ln 2}\cdot e^{\ln\pi}$	(propiedades de la potenciación)
(2)	$e^{\ln 2} = 2$	(las funciones exponencial y logaritmo son inversas)
(3)	$e^{\ln\pi} = \pi$	
(4)	$e^{\ln 2\pi} = 2\pi$	

De (2) y (3) se infiere que $e^{\ln 2}\cdot e^{\ln\pi} = 2\pi$. Esta última igualdad junto con la igualdad (1) se cumplen solo si $e^{\ln 2+\ln\pi} = 2\pi$. Ahora, esta igualdad y la igualdad (4) implican que $e^{\ln 2+\ln\pi} = e^{\ln 2\pi}$. Pero del hecho de que la función exponencial es inyectiva y que $e^{\ln 2+\ln\pi} = e^{\ln 2\pi}$ se infieren que $\ln 2\pi = \ln 2 + \ln\pi$. Por lo tanto es cierta la afirmación del teorema.

□

3.

Teorema 1.5.8. *$\ln 5^{-1} = -\ln 5$.*

Demostración.

Sabemos que se cumplen las siguientes igualdades:

(1)$e^{-\ln 5} = (e^{\ln 5})^{-1}$	(2) $e^{\ln 5} = 5$	(3) $e^{\ln 5^{-1}} = 5^{-1}$
(4) $\ln(e^{-\ln 5}) = -\ln 5$	(5) $\ln(e^{\ln 5^{-1}}) = \ln 5^{-1}$	

La primera es una propiedad de la potenciación y las demás se derivan del hecho de que las funciones logaritmo y exponencial son funciones inversas la una de la otra. De la igualdad (2) inferimos:

$$(6) \qquad (e^{\ln 5})^{-1} = 5^{-1}$$

Pero solo (1) y (6) si:

$$(7) \qquad e^{-\ln 5} = 5^{-1}$$

Y si (7) y (3) se cumplen entonces:

$$(8) \qquad e^{-\ln 5} = e^{\ln 5^{-1}}$$

aplicando logaritmo natural a ambos lados de la igualdad:

$$(9) \qquad \ln(e^{-\ln 5}) = \ln(e^{\ln 5^{-1}})$$

Finalmente para (4), (5) y (9), es necesaria $\ln 5^{-1} = -\ln 5$. Por lo tanto es cierta la afirmación del teorema. □

4.

Teorema 1.5.9. $[1,3] \nsubseteq [2,5]$.

Demostración.

Que $[1,3] \subseteq [2,5]$ sea verdad es lo mismo que $2 \leq 1$ y $3 \leq 5$ sean ciertas. Y aunque $3 \leq 5$, sabemos que $2 > 1$ y que ésto equivale a $2 \nleq 1$. Así $[1,3] \subseteq [2,5]$ no puede ser cierta.

□

5.

Teorema 1.5.10. *El producto de dos de los tres números siguientes debe ser mayor o igual a cero:*

$$87^{2145} - 64^{3000} \qquad 106^{225} - 24^{500} \qquad -13034^{127}$$

Demostración.
Nombremos los números de la siguiente manera:

$$a = 87^{2145} - 64^{3000} \qquad b = 106^{225} - 24^{500} \qquad c = -13034^{124}$$

Sabemos que c es un número negativo. Ahora, si revisamos las posibilidades tenemos:

1) a y b son positivos.
2) a positivo y b negativo.
3) a negativo y b positivo.
4) a y b negativos.

Para el caso a), sabemos que el producto de dos enteros positivos es positivo, entonces ab es positivo.

Para el caso b), sabemos que el producto de dos enteros negativos es positivo, entonces bc es positivo.

Para el caso c), sabemos que el producto de dos enteros negativos es positivo, entonces ac es positivo.

Para el caso d), sabemos que el producto de dos enteros negativos es positivo, entonces ab es positivo .

Sabemos que un número sea positivo significa que es mayor o igual a cero. Por lo tanto, queda probado el enunciado. □

Capítulo 2

Cálculo de predicados

En el cálculo de predicados desarrollamos el mismo trabajo de equivalencias e inferencia del cálculo proposicional, con la diferencia de que aquí podremos 'contextualizar' las afirmaciones. Por supuesto, en lógica la palabra contexto tiene una definición rigurosa y por lo tanto restringida respecto a lo que esto significa en español. Sin embargo, los predicados logran mayor expresividad y aplicabilidad que las proposiciones.

Podemos darnos una idea de estas ventajas en la sección de traducción. Con los predicados podremos traducir la mayoría de los teoremas que conocemos del cálculo, junto con sus demostraciones.

2.1. Predicados

Definición 10.

Un predicado es una afirmación acerca de una o varias variables que representan elementos de uno o varios conjuntos. Dichos conjuntos conforman el universo de discurso del predicado.

Usaremos las letras minúsculas $u, v, w, x, y, z...$ para las variables a las que se refieren los predicados, y las letras mayúsculas $P, Q, R, S...$ para nombrarlos.

Un predicado que involucre una variable se llama predicado unario, para dos variables binario, para tres ternario, etc.

Observación 4.

Si un predicado tiene mas de una variable entonces el universo de discurso está conformado por mas de un conjunto. Es decir, para un predicado $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, escribiremos el universo de discurso $U_1 \times U_2 \times ...U_n$, si $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, $...x_n \in U_n$. La manera mas prática de expresarlo es $(x_1, x_2, ..., x_n) \in U_1 \times U_2 \times ...U_n$.

Ejemplo 2.1.1.

Consideremos las siguientes expresiones:

'$x < y$'	'f es una función continua'	'$3x + 2y = 6$'
'n es impar'	'$z > 3$'	'$u + v = w$'

Escritas como aparecen arriba no son predicados, puesto que una expresión como '$x < y$' no tiene sentido si no conocemos que tipo de objetos representan estas variables. No obstante, en este caso particular el símbolo $<$ nos refiere a los conjuntos de números en los cuales se usa para representar el orden de éstos.

Escribimos a continuación los predicados de forma rigurosa junto con su aridad y el universo de discurso diferenciado para cada una de sus variables:

Predicado	**Variables**	**Universo de discurso**	**Aridad**
$P(x,y)$: '$x < y$'	(x,y)	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Binario
$C(f,x)$: 'f es una función continua en x'	(f,x)	Funciones reales$\times\mathbb{R}$	Binario
$S(x,y)$: '$3x + 2y = 6$'	(x,y)	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Binario
$Q(n)$: 'n es impar'	n	$\mathbb{N}$	Unario
$R(z)$: '$z > 3$'	z	$\mathbb{Z}$	Unario
$M(u,v,w)$: '$u + v = w$'	(u,v,w)	$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$	Ternario

$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, $\mathbb{Z}$ el de los enteros, $\mathbb{Q}$ el de los racionales y $\mathbb{R}$ el de los reales.

Como vimos en el ejemplo, puede suceder también que un predicado con varias variables tenga un universo de discurso conformado por diferentes conjuntos. Por ejemplo: $B(x,y,f)$: '$(x,y) \in f$' tiene como universo de discurso a ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}\times$ Funciones reales). El predicado es ternario. Dos de sus tres variables x, y son números reales y la tercera variable f es una función real.

Observación 5. *La palabra fórmula también se refiere a los predicados.*

Un predicado no es una proposición, dado que es una afirmación acerca de la cual no podemos decidir si es verdadera o falsa. Claramente, ésto es consecuencia de que una variable representa a un elemento cualquiera del universo de discurso y por lo tanto no sabemos exactamente acerca de 'quien' se esta haciendo la afirmación. Sin embargo, los predicados son conocidos también como funciones proposicionales. Ésto debido a que si reemplazamos las variables por elementos del universo de discurso obtenemos proposiciones.

Ejemplo 2.1.2.

Veamos como el siguiente predicado puede verse como una función proposicional.

$$R(z): \quad \text{'}z > 3\text{'} \qquad z \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} R: \quad & \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Proposiciones} \\ & 1 \longrightarrow R(1) : \text{'}1 > 3\text{'} \\ & 2 \longrightarrow R(2) : \text{'}2 > 3\text{'} \\ & 3 \longrightarrow R(3) : \text{'}3 > 3\text{'} \\ & 4 \longrightarrow R(4) : \text{'}4 > 3\text{'} \end{aligned}$$

Claramente $R(1), R(2), R(3)$ y $R(4)$ son proposiciones, pues sabemos que $R(1), R(2), R(3)$ son afirmaciones falsas y $R(4)$ es verdadera.

Inferimos de lo anterior que los predicados son una forma de escritura lógica más general que las proposiciones, y que por lo tanto tendremos en éstos mayor expresividad.

Podemos mediante los conectivos construir predicados nuevos o compuestos a partir de predicados conocidos. La siguiente definicón nos indica cómo.

Definición 11. A partir de predicados $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ con sus respectivos universos de discurso $U_1, U_2, ..., U_n$ podemos construir los predicados:

$$\neg P(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad P(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow Q(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad P(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow Q(x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Los nuevos predicados no sólo contienen más información sino también probablemente más variables. Lo que significa que la aridad de los predicados compuestos puede ser mayor. También es posible que la aridad se conserve, lo que no sucederá es que la aridad disminuya. Ilustraremos esto con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.1.3.

Para los predicados $P(z)$: '$3 < z$', $Q(z)$: '$z < 5$' y $S(x, y, z)$: '$3x + 2y = 5z$' con universo de discurso $\mathbb{Z}$, podemos construir:

$$P(z) \wedge Q(z) : \text{`}(3 < z) \wedge (z < 5)\text{'} \tag{1}$$

$$P(z) \rightarrow S(x, y, z) : \text{`}(3 < z) \rightarrow (3x + 2y = 5z)\text{'} \tag{2}$$

Como P y Q son predicados con la misma variable, entonces al unirlos en (1) por medio de una conjunción, obtenemos un predicado con la misma aridad de éstos. En el predicado (2) la aridad es tres, debido a que hay tres diferentes variables en los predicados P y S.

2.1.1. Conjunto de verdad

Definición 12. El conjunto de verdad de un predicado es el conformado por los elementos del universo de discurso para los que es cierto el predicado. Para un predicado P notaremos su conjunto de verdad con V_P.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.1.4.

#	Predicado	Variables	Universo de discurso U	Conjunto de verdad
1.	$P(x)$: '$x^2 - x - 12 = 0$'	x	$\mathbb{R}$	$V_P = \{4, -3\}$
2.	$M(x)$: '$3 < x \leq 7$'	x	$\mathbb{R}$	$V_M = (3, 7]$
3.	$N(x)$: '$1 < 3x + 4 \leq 16$'	x	$\mathbb{R}$	$V_N = (-1, 4]$
4.	$O(x)$: '$5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2$'	x	$\mathbb{R}$	$V_O = (-\infty, -2] \cup [1/2, \infty)$
5.	$Q(x)$: 'x es par'	x	$\{1, 3, 5, 7\}$	$V_Q = \emptyset$
6.	$K(x)$: 'x es primo'	x	{13,11,17}	$V_K = \{13, 11, 17\}$

Justifiquemos las respuestas del ejemplo anterior.

Justificación

1. $P(4)$: '$4^2 - 4 - 12 = 0$' y $P(-3)$: '$(-3)^2 - (-3) - 12 = 0$' son verdaderas. El conjunto de vedad en este caso está formado por las soluciones reales de la ecuación $x^2 - x - 12 = 0$. Un polinomio de grado dos tiene a lo más dos ceros.

2. Los únicos reales que cumplen las desigualdades planteadas $3 < x \leq 7$ son los que pertenecen al intervalo $(3, 7]$. Aquí el conjunto solución es el intervalo solución de la desigualdad $3 < x \leq 7$.

3. Si seguimos el procedimiento obtenemos el intervalo correspondiente al conjunto de verdad:

$$
\begin{aligned}
&1 < 3x + 4 \leq 16\\
&-3 < 3x \leq 12\\
&-1 < x \leq 4
\end{aligned}
$$

4. Si seguimos un procedimiento como el anterior obtenemos $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$ y al factorizar la expresión $(2x - 1)(x + 2) \geq 0$. Luego el siguiente cementerio nos da el intervalo correspondiente al conjunto de verdad:

(2x-1)	−	-2	−	1/2	+
(x+2)	−	-2	+	1/2	+
(2x-1)(x+2)	+	-2	−	1/2	+

5. Ningún elemento del conjunto $\{1, 3, 5, 7\}$ es par luego el conjunto de verdad es vacio, lo cual se simboliza con $\emptyset$.

6. Todos los elementos de U cumplen la condición de ser números primos; por tanto en este caso el conjunto de verdad es igual al universo.

   Observación 6.

   En todos los casos el conjunto de verdad está contenido en l universo; en algunos casos estos dos conjuntos son iguales.

Ejercicios 2.1.1.

Halle los conjuntos de verdad para los predicados y señale su relación con el universo:

1. $P(x)$: 'x es par'. Universo de discurso: $\mathbb{N}$.
2. $Q(x)$: 'x es impar'. Universo de discurso: $\mathbb{N}$
3. $R(x)$: 'x es primo'. Universo de discurso: $\mathbb{N}$
4. $S(x)$: 'x es par'. Universo de discurso: $\mathbb{Z}$.
5. $T(x)$: 'x es impar'. Universo de discurso: $\mathbb{Z}$
6. $U(x)$: 'x es primo'. Universo de discurso: $\mathbb{Z}$
7. $V(x, y)$: '$xy < 0$'. Universo de discurso: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

8. $Y(x)$: 'x es múltiplo de 3'. Universo de discurso: $\mathbb{Z}$
9. $Z(x)$: 'x es múltiplo de 3'. Universo de discurso: $\mathbb{R}$
10. $A(x)$: 'x es divisor de 32'. Universo de discurso: $\mathbb{N}$
11. $B(x)$: 'x es divisor de 32'. Universo de discurso: $\mathbb{Z}$
12. $C(x)$: 'x es divisor de 53'. Universo de discurso: $\mathbb{N}$
13. $D(x)$: '$x^2 + x + 1 = 0'$. Universo de discurso: $\mathbb{R}$
14. $M(x)$: '$3 \leq 4x - 5 < 13$'. Universo de discurso: $\mathbb{R}$
15. $N(x)$: '$3 \leq 4x - 5 < 13$'. Universo de discurso: $\mathbb{Q}$
16. $P(x)$: '$3 \leq 4x - 5 < 13$'. Universo de discurso: $\mathbb{Z}$
17. $Q(x)$: '$3 \leq 4x - 5 < 13$'. Universo de discurso: $\mathbb{N}$
18. $E(x)$: '$(2x + 1)(x - 2) = 0$'. Universo de discurso: $\mathbb{R}$
19. $F(x)$: '$(2x + 1)(x - 2) = 0$'. Universo de discurso: $\mathbb{N}$
20. $G(x)$: '$(2x + 1)(x - 2) = 0$'. Universo de discurso: $\mathbb{Z}$
21. $F(x)$: '$(2x + 1)(x - 2) = 0$'. Universo de discurso: $\mathbb{Q}$
22. $W(x, y)$: '$xy < 0$'. Universo de discurso: $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.
23. $X(x, y)$: '$xy < 0$'. Universo de discurso: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.2. Cuantificadores

Hemos visto ya que de los predicados podemos obtener proposiciones reemplazando la variable por elementos del universo de discurso. Estas son afirmaciones acerca de elementos específicos del conjunto. No obstante, éstas no son las únicas proposiciones que se obtienen de los predicados. Si a un predicado le aplicamos la cuantificación de alguna de sus variables, logramos una nueva afirmación general sobre los elementos de su universo de discurso. Este tipo de afirmaciones generales se refiere a los elementos en conjunto, no a elementos como individuos. Es decir, las proposiciones que se obtienen reemplazando las variables por elementos del universo de discurso se refieren individualmente a dichos elementos, en contraste al cuantificar una variable nos estamos refiriendo a los elementos que esta variable representa sumergidos en su contexto.

En este capítulo será necesario nombrar los elementos del universo de discurso de forma general (variable) y de forma particular (constante). Así las últimas letras del alfabeto en minúscula $...x, y, z$ se usarán para referirnos a elementos cualesquiera del universo de discurso, es decir serán variables. Las primeras letras del alfabeto en minúscula $a, b, c, d, ...$, en cambio representarán elementos específicos del universo de discurso, es decir constantes.

Definición 13. Existen dos cuantificadores en la lógica clásica: Universal ($\forall$) y existencial ($\exists$). Las expresiones obtenidas por un predicado y la cuantificación de una de sus variables son conocidas como fórmulas cuantificadas. En esta sección trabajaremos con predicados unarios. En las secciones siguientes retomaremos los de aridad mayor.

Para un predicado $P(x)$ con universo de discurso U las fórmulas que se obtienen al cuantificar su variable x son:

Universal

La cuantificación universal de la variable x en el predicado $P(x)$ se escribe $\forall x P(x)$, y afirma que 'Para todo elemento x de U, se cumple $P(x)$'. La fórmula resultante es una proposición, puesto que podemos decidir si es verdadera o falsa siguiendo el razonamiento de la tabla siguiente.

$\forall x P(x)$	V	Si al reemplazar la variable x por cada elemento de U obtenemos una proposición verdadera.
	F	Si existe un elemento a de U para el cual la proposición $P(a)$ es falsa.

También encontraremos otras lecturas de la cuantificación universal '$\forall x$': 'Para todo x', 'Para cada x', 'Para cualquier x'.

Existencial

La cuantificación existencial de la variable x en el predicado $P(x)$ se escribe $\exists x P(x)$, y afirma que 'existe un elemento a de U para el cual se cumple $P(a)$'. De nuevo obtenemos una proposición cuyo valor de verdad se explica en la tabla a continuación.

$\exists x P(x)$	V	Si existe un elemento a de U para el cual la proposición $P(a)$ es verdadera.
	F	Si al reemplazar la variable x por cada elemento de U obtenemos una proposición falsa.

También encontraremos otras lecturas de la cuantificación existencial '$\exists x$': 'Existe x', 'Algún x', 'Al menos un x'.

Para decidir si una fórmula cuantificada es verdadera o falsa debemos encontrar un ejemplo o contraejemplo en algunos casos, o hacer una demostración en otros. En la siguiente tabla especificaremos esta situación. Aclaramos que cuando decimos *contraejemplo* nos referimos a un ejemplo que *contradice* la afirmación universal. Es decir, si queremos probar que una fórmula cuantificada universalmente es falsa, es necesario encontrar al menos un elemento del universo para el cual el predicado es falso; ese elemento sirve ejemplo que contradice la fórmula universal.

$\forall x P(x)$	V	Demostración
	F	Contraejemplo
$\exists x P(x)$	V	Ejemplo
	F	Demostración

En general hallar un ejemplo o un contraejemplo es sencillo; se trata solo de hallar un elemento que cumpla lo que queremos. De otro lado, el ejercicio de demostrar es sencillo si el número de elementos del universo es manejable, pues en un conjunto con finitos elementos se podría hacer una verificación elemento por elemento. Sin embargo, cuando hay demasiados elementos (infinitos elementos o cantidad finita inmanejable), plantear la demostración e incluso en algunos casos, encontrar el ejemplo no es sencillo.

Observación 7.

Dada $\exists x P(x)$ verdadera. Si a es el elemento de U para el que se cumple que $P(a)$ es verdadera, decimos que a sirve de testigo para la fórmula $\exists x P(x)$.

En el siguiente ejemplo el universo de discurso solo tiene cinco elementos. Así que decidiremos la veracidad o falsedad de las fórmulas y completaremos la justificación de estas.

Ejemplo 2.2.1.

Considere en cada caso que el universo de discurso es $U = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

1) $\forall n(n \text{ es par})$
2) $\forall y(y \leq 9)$
3) $\exists z\,[(z \text{ es primo}) \to (z + 2 \text{ es primo })]$
4) $\exists m\,[(m - 9)(m + 1) = 0]$

Ahora justificaremos la veracidad o falsedad de las proposiciones.

$\sharp$	**Valor**	**Tipo de prueba**	**Prueba**
1)	F	Contraejemplo	La proposición (5 es par) es falsa. (Aquí hemos usado $n = 5$).
2)	V	Demostración	Las proposiciones $(4 \leq 9), (5 \leq 9), (6 \leq 9)$, $(7 \leq 9)$ y $(8 \leq 9)$ son verdaderas. (Aquí $y = 4, 5, 6, 7, 8$).
3)	V	Ejemplo	La proposición (5 es primo) $\to$ $(5 + 2$ es primo). . es verdadera. (Aquí $z = 5$).
4)	F	Demostración	Las proposiciones $[(4 - 9)(4 + 1) = 0], [(5 - 9)(5 + 1) = 0]$, $[(6 - 9)(6 + 1) = 0], [(7 - 9)(7 + 1) = 0]$ y $[(8 - 9)(8 + 1) = 0]$, son falsas. (Aquí $m = 4, 5, 6, 7, 8$)

Observación 8. *Podríamos usar también $z = 4$ y así la proposición* (4 *es primo*) $\to$ $(4 + 2$ *es primo*) *resulta verdadera dado que la premisa de esta implicación,* (4 *es primo*) *es falsa.*

A continuación desarrollaremos ejemplos en donde el universo de discurso es infinito. Algunas justificaciones no serán completas, pues necesitaremos una demostración como las que trabajaremos en el capítulo 3. En estos casos enunciaremos una justificación breve no rigurosa.

Ejemplo 2.2.2.

El universo de discurso es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$

1) $\forall x(x^2 \geq 0)$ 2) $\forall y(y^2 - 3 > 0)$ 3) $\forall x[(x > 1) \to (x + 1 > 1)]$

4) $\exists z \left(\dfrac{z}{z^2 + 1} = \dfrac{3}{10} \right)$ 5) $\exists y \left(\dfrac{1}{y^2 + 1} > 1 \right)$ 6) $\exists x(x^2 + x - 1 = 0)$

Los valores de verdad con sus justificaciones:

♯	**Valor**	**Tipo de prueba**	**Prueba o justificación**
1)	V	Demostración	Todo número elevado al cuadrado es positivo o cero.
2)	F	Contraejemplo	La proposición $(0^2 - 3 > 0)$ es falsa. (Aquí $y = 0$).
3)	V	Demostración	Si $x > 1$ entonces $x + 1 > 2$, y como $2 > 1$ concluimos que $x + 1 > 1$.
4)	V	Ejemplo	La proposición $\left(\dfrac{3}{3^2+1} = \dfrac{3}{10}\right)$ es verdadera. (Aquí $z = 3$).
5)	F	Demostración	Todo número elevado al cuadrado es positivo, y al sumarle 1 obtenemos un número mayor que 1. Por lo tanto, al dividir a 1 por un número tal, necesariamente el resultado es menor o igual que 1.
6)	V	Ejemplo	La propossición $\left[\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1\right] = 0$ es verdadera. (Aquí $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$).

En estos ejemplos las únicas pruebas rigurosas son las que corresponden a ejemplos, es decir las de los numerales $2), 4)$ y $6)$. Para las que requieren una demostración hemos enunciado la idea principal de ésta. Sin embargo, para este tipo de proposiciones sencillas enunciar solo la idea principal es aceptado como prueba.

Debemos también observar que para probar la proposición $\forall x[(x > 1) \to (x+1 > 1)]$ que es una implicación, hemos supuesto que la premisa $(x > 1)$ es verdadera. Pero como se trata de una fórmula universal, debería incluirse el caso en que la premisa es falsa es decir $((x \leq 1)$; sin embargo en estas condiciones es claro que la implicación resulta verdadera. Es por eso que solo se hace la prueba para el caso en que la premisa es verdadera.

Observación 9.

Rara vez enunciamos el tipo de prueba: una demostración o un ejemplo. Lo hacemos en esta sección ya que es el tema que estamos tratando, pero por lo general nosotros lo omitiremos y en los libros de Matemáticas siempre se omite.

Observación 10. *Si un predicado posee varias variables y todas están cuantificadas, la fórmula resultante es una proposición.*

Ejercicios 2.2.1.

Determine cuáles de las siguientes fórmulas cuantificadas son verdaderas y cuáles falsas. En ambos casos enuncie una prueba.

I. Universo de discurso: los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

1) $\forall n(n > 0)$ 2) $\exists n(n > 0)$ 3) $\forall n(n \leq 0)$

4)$\exists n(n \leq 0)$ 5) $\forall n[(n + 3 = 7) \wedge (n + 5 = 1)]$ 6)$\forall n[(n + 3 = 7) \vee (n + 5 = 1)]$

7)$\forall m(m - 5 > 0)$ 8)$\exists n[(n + 3 = 7) \wedge (n + 5 = 1)]$ 9)$\exists n[(n + 5 = 7) \vee (n + 5 = 1)]$

10)$\exists n(n^2 + 2n + 1 = 0)$ 11)$\exists n(2n^2 + n - 1 = 0)$ 12)$\exists n(3n^2 + 3n - 1 = 0)$

II. Universo de discurso: los números enteros $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

1) $\forall n(n > 0)$	2) $\exists n(n > 0)$	3) $\forall n(n \leq 0)$
4)$\exists n(n \leq 0)$	5) $\forall n[(5n + 3 = 7) \wedge (n + 5 = 1)]$	6)$\forall n[(n + 3 = 7) \vee (n + 5 = 1)]$
7)$\forall m(m - 5 > 0)$	8)$\exists n[(5n + 3 = 7) \wedge (n + 5 = 1)]$	9)$\exists n[(n + 5 = 7) \vee (n + 5 = 1)]$
10)$\exists n(n^2 + 2n + 1 = 0)$	11)$\exists n(2n^2 + n - 1 = 0)$	12)$\exists n(3n^2 + 3n - 1 = 0)$

III. Universo de discurso: los números racionales $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$.

1) $\forall n(n > 0)$	2) $\exists n(n > 0)$	3) $\forall n(n \leq 0)$
4)$\exists n(n \leq 0)$	5) $\forall n[(n + 3 = 7) \wedge (n + 5 = 1)]$	6)$\forall n[(n + 3 = 7) \vee (n + 5 = 1)]$
7)$\forall m(m - 5 > 0)$	8)$\exists n[(n + 3 = 7) \wedge (n + 5 = 1)]$	9)$\exists n[(n + 5 = 7) \vee (n + 5 = 1)]$
10)$\exists n(n^2 + 2n + 1 = 0)$	11)$\exists n(2n^2 + n - 1 = 0)$	12)$\exists n(3n^2 + 3n - 1 = 0)$

IV. Universo de discurso: los números reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$ (Irracionales).

1) $\forall x[(x > 0) \rightarrow (x^2 > x)]$	2) $\exists x[(x > 0) \rightarrow (x^2 > x)]$	3) $\forall x(x^2 \geq 0)$
4)$\exists x(x^2 \geq 0)$	5) $\exists y(y^2 + y + 1 = 0)$	6)$\exists z(z^3 = 7)$
7)$\forall x(x < 1 \rightarrow x^2 < 1)$	8)$\forall x(x < 1 \rightarrow x^2 < 1)$	

2.2.1. Ámbito, variables libres y ligadas

Usando los conectivos y los cuantificadores podemos construir nuevas proposiciones y nuevos predicados a partir de las fórmulas cuantificdas, las proposiciones y los predicados de aridad arbitraria.

Ejemplo 2.2.3.

De los siguientes predicados con universo de discurso U:

1) $P(x)$ 2) $Q(x)$ 3) $R(x, y)$ 4) $S(z)$

usando conectivos y cuantificadores podemos construir las fórmulas cuantificadas:

5) $\exists x P(x)$	6) $\exists x Q(x)$
7) $\forall x R(x, y)$	8) $\forall z S(z)$
9)$P(x) \wedge Q(x)$	10) $\exists y R(x, y)$

y repitiendo el proceso obtenemos:

11) $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	12) $\forall z S(z) \vee P(x)$
13) $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$	14) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \rightarrow R(x, y)$
15) $\exists x P(x) \wedge \exists y R(x, y)$	

$5), 6), 7), 8)$ y $10)$ se obtienen de $1), 2), 3)$ y $4)$ usando cuantificadores. 9) se obtiene de 1) y 2) usando la conjunción. De éstas solo $5), 6)$ y 8) son proposiciones. $7), 9)$ y 10) conservan variables no cuantificadas. En 7) la variable y sigue sin cuantificar, en 10) la variable x sigue sin cuantificar y en 9) no aparecen cuantificadores para la variable x. Esto significa que $7), 9)$ y 10) siguen siendo predicados, puesto que estas variables siguen representando elementos cualesquiera del universo de discurso. Similarmente, las fórmulas del número 11) al 15) se obtienen de las fórmulas del 1) al 10).

Definición 14. Las variables sin cuantificar en una fórmula se llaman variables *libres* y las que han sido cuantificadas se llaman *ligadas* o *acotadas*.

En el ejemplo 2.2.3, fórmula $7)\forall x R(x, y)$, y es variable libre mientras que x es variable ligada. En la fórmula $15)\exists x P(x) \wedge \exists y R(x, y)$ la variable y es ligada y la variable x es libre y ligada simultáneamente. Se observa que el cuantificador $\exists x$ solo cuantifica a x en la fórmula $P(x)$ y no en la fórmula $R(x, y)$. Se dice entonces que el *ámbito* o *alcance* de la cuantificación $\exists x$ es $P(x)$, mientras que el ámbito de la cuantificación $\exists y$ es $R(x, y)$.

Definición 15.

El *ámbito* o *alcance* de una cuantificación es la fórmula sobre la cual actúa el cuantificador.

Ejemplo 2.2.4.

En la siguiente tabla listamos algunas fórmulas del ejemplo 2.2.3 junto con los ámbitos de sus cuantificadores, y sus variables libres y ligadas.

Fórmula	**V. libres**	**V. Ligadas**	**Cuantificación**	**Ámbito**
$\exists x P(x)$	$-$	x	$\exists x$	$P(x)$
$\forall x R(x, y)$	y	x	$\forall x$	$R(x, y)$
$\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	$-$	x	$\forall x$ $\exists x$	$P(x)$ $Q(x)$
$\forall z S(z) \vee P(x)$	x	z	$\forall z$	$S(z)$
$\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$	$-$	x	$\exists x$	$[P(x) \wedge Q(x)]$

Observación 11.

Si todas las variables de una fórmula son ligadas entonces es proposición; por otra parte si alguna variable es libre, la fórmula es un predicado más no es proposición.

Ejercicios 2.2.2.

1. Determine cómo se usaron los conectivos y cuantificadores para obtener las fórmulas del número 11) al 15) en el ejemplo 2.2.3.

2. Complete la tabla para las fórmulas del 1) al 15) que no fueron explicadas.

3. Complete la tabla de las siguientes fórmulas:

   16) $\forall z[T(x, y, z) \rightarrow S(y)] \wedge \exists x R(x, y, z)$ 17) $\forall z[T(x, y, z) \rightarrow S(y) \wedge R(x, y, z)]$
   18) $\exists x[P(x) \vee Q(z)]$ 19) $\forall x P(x) \vee Q(z)$

2.2.2. Cuantificadores anidados

Las fórmulas con aridad mayor a uno no derivan en una proposición cuando no se cuantifica todas sus variables. Para obtener una proposición tenemos dos posibilidades. La primera es reemplazar las variables libres por elementos del universo de discurso. La segunda es cuantificar las variables que están libres hasta que todas queden ligadas. Cuando aplicamos la última opción, la fórmula inicial queda bajo el efecto de varios cuantificadores, y esto es lo que llamamos *cuantificación anidada*.

Ejemplo 2.2.5.

Si al predicado $P(x, y)$: '$x < y$' con universo $\mathbb{R}$ aplicamos la cuantificación $\exists x$, obtenemos la fórmula $\exists x(x < y)$. A ésta no podemos asignarle un valor de verdad, puesto que y aparece libre y por lo tanto no es proposición. Sin embargo, sí es un predicado con variable y; así que si lo nombramos como $Q(y)$ entonces podemos cuantificar la variable y como sigue:

Predicado $Q(y)$: '$\exists x(x < y)$'	Cuantificación universal de y en $Q(y)$:	$\forall y Q(y)$
	Cuantificación existencial de y en $Q(y)$:	$\exists y Q(y)$

Si reescribimos las fórmulas tenemos:

Cuantificación universal de y en $Q(y)$:	$\forall y[\exists x(x < y)]$
Cuantificación existencial de y en $Q(y)$:	$\exists y[\exists x(x < y)]$

Los paréntesis cuadrados encierran el predicado $Q(y)$, pero usualmente no se escriben. Así, una presentación simplificada queda como sigue:

Cuantificación universal de y en $Q(y)$:	$\forall y \exists x(x < y)$
Cuantificación existencial de y en $Q(y)$:	$\exists y \exists x(x < y)$

Sin embargo, se debe entender que el ámbito del primer cuantificador a la izquierda de la fórmula es $Q(y)$ es decir, $\exists x(x < y)$.

En esta sección nos ocuparemos de la cuantificación anidada de los predicados binarios. Para los predicados de aridad mayor el ejercicio es análogo.

Definición 16.

Para un predicado $P(x, y)$ con universo de discurso U podemos construir las siguientes cuantificaciones anidadas:

(1) $\forall x \forall y P(x, y)$	(5) $\forall y \forall x P(x, y)$
(2) $\exists x \exists y P(x, y)$	(6) $\exists y \exists x P(x, y)$
(3) $\forall x \exists y P(x, y)$	(7) $\exists y \forall x P(x, y)$
(4) $\exists x \forall y P(x, y)$	(8) $\forall y \exists x P(x, y)$.

Observación 12. *Las fórmulas (1) y (5) resultan equivalentes, así como (2) y (6).*

Estas fórmulas son proposiciones, ya que todas sus variables son ligadas. Antes de aclarar el significado de estas nuevas fórmulas es necesario indicar el ámbito de sus cuantificadores.

Fórmula	**Cuantificador externo**	**Ámbito**	**Cuantificador interno**	**Ámbito**
$\forall x \forall y P(x,y)$	$\forall x$	$\forall y P(x,y)$	$\forall y$	$P(x,y)$
$\forall y \forall x P(x,y)$	$\forall y$	$\forall x P(x,y)$	$\forall x$	$P(x,y)$
$\exists x \exists y P(x,y)$	$\exists x$	$\exists y P(x,y)$	$\exists y$	$P(x,y)$
$\exists y \exists x P(x,y)$	$\exists y$	$\exists x P(x,y)$	$\exists x$	$P(x,y)$
$\forall x \exists y P(x,y)$	$\forall x$	$\exists y P(x,y)$	$\exists y$	$P(x,y)$
$\exists y \forall x P(x,y)$	$\exists y$	$\forall x P(x,y)$	$\forall x$	$P(x,y)$
$\exists x \forall y P(x,y)$	$\exists x$	$\forall y P(x,y)$	$\forall y$	$P(x,y)$
$\forall y \exists x P(x,y)$	$\forall y$	$\exists x P(x,y)$	$\exists x$	$P(x,y)$

Ahora podemos enunciar lo que afirman estas frases:

* Las propoposiciones $\forall x \forall y P(x,y)$ y $\forall y \forall x P(x,y)$ afirman que para todo par de elementos x, y de U se cumple $P(x,y)$.

* $\exists x \exists y P(x,y)$ y $\exists y \exists x P(x,y)$ afirman que existe una pareja de elementos x, y tales que $P(x,y)$ se cumple.

* $\forall x \exists y P(x,y)$ afirma que para cada elemento x de U podemos encontrar un elemento y de U para el cual $P(x,y)$ se cumple. Es importante notar que ese elemento y depende de cada x de U.

* $\exists y \forall x P(x,y)$ afirma que existe un elemento y de U tal que para cualquier x que escojamos de U se cumple $P(x,y)$. La diferencia con la proposición anterior es que el elemento y es un elemento particular de U que no depende de la escogencia del elemento x de U.

Para decidir si una fórmula con cuantificación anidada es verdadera o falsa justificando dicha decisión, nos referiremos a la siguiente tabla:

$\forall x \forall y P(x,y)$	V	Demostración
	F	Contraejemplo
$\exists x \exists y P(x,y)$	V	Ejemplo
	F	Demostración
$\exists x \forall y P(x,y)$	V	Ejemplo y Demostración
	F	Demostración y contraejemplo
$\forall y \exists x P(x,y)$	V	Demostración y Ejemplo
	F	Contraejemplo y Demostración

El ejemplo a continuación nos aclarará un poco esta tabla de cuantificación anidada.

Ejemplo 2.2.6.

Para el predicado $P(x, y)$: '$x < y$' con universo de discurso $\mathbb{N}$, haremos una traducción de las fórmulas y luego listaremos los valores de verdad y la idea principal de la prueba.

Fórmula	**Traducción**
1)$\forall x \forall y(x < y)$	Al elegir cualquier par de números naturales x y y, resulta que $x < y$.
2)$\exists x \exists y(x < y)$	Existe un par de números x y y tales que $x < y$.
3)$\exists x \forall y(x < y)$	Existe un número natural x tal que si lo comparamos cocualquier número natural y resulta que$x < y$.
4)$\forall y \exists x(x < y)$	Para cada número natural y existe un número natural x tal que $x < y$.

Fórmula	**Valor**	**Tipo de prueba**	**Prueba o justificación**
1)	F	Contraejemplo	Para $x = 5$ y $y = 2$ la proposición '$5 < 2$' es falsa.
2)	V	Ejemplo	Para $x = 3$ y $y = 7$ la proposición '$3 < 7$' es verdadera.
3)	F	Demostración y Contraejemplo	Si escogemos $x = 0$, sabemos que $\forall y(0 < y)$ es verdadera, si $y \neq 0$, pero es falsa si $y = 0$ puesto que'$0 < 0$' es falsa. Si escogemos cualquier otro número natural x mayor que 0 $\forall y(x < y)$ falla nuevamente.
4)	F	Contraejemplo y Demostración	Para $y = 0$, la proposición $\exists x(x < 0)$ es falsa, debido a que en $\mathbb{N}$ no hay números menores a 0.

Ejercicios 2.2.3.

I. Para cada predicado binario $P(x, y)$ llene la siguiente tabla. En la tabla 'U.D.' significa universo de discurso, y 'V ó F' significa verdadero o falso.

	Fórmula	**U. D.**	**V ó F**	**Justifición**
a).	$\forall x \forall y P(x, y)$	$\mathbb{N}$		
		$\mathbb{Z}$		
		$\mathbb{Q}$		
		$\mathbb{R}$		
b)	$\exists x \exists y P(x, y)$	$\mathbb{N}$		
		$\mathbb{Z}$		
		$\mathbb{Q}$		
		$\mathbb{R}$		
c)	$\forall x \exists y P(x, y)$	$\mathbb{N}$		
		$\mathbb{Z}$		
		$\mathbb{Q}$		
		$\mathbb{R}$		

	Fórmula	U. D.	V ó F	Justifición
d)	$\exists x \forall y P(x,y)$	$\mathbb{N}$		
		$\mathbb{Z}$		
		$\mathbb{Q}$		
		$\mathbb{R}$		
e)	$\forall y \forall x P(x,y)$	$\mathbb{N}$		
		$\mathbb{Z}$		
		$\mathbb{Q}$		
		$\mathbb{R}$		
f)	$\exists y \exists x P(x,y)$	$\mathbb{N}$		
		$\mathbb{Z}$		
		$\mathbb{Q}$		
		$\mathbb{R}$		

1. $P(x,y)$: '$x \leq y$'
2. $P(x,y)$: '$x + y = 3$'
3. $P(x,y)$: '$(x < y) \to (x^2 < y^2)$'
4. $P(x,y)$: '$(0 < y < x < 1) \to (y^2 < x^2 < 1)$'
5. $P(x,y)$: '$(3x + 2y = 5) \wedge (7x + 2y = 0)$'
6. $P(x,y)$: '$x^2 < y + 3$'
7. $P(x,y)$: '$x^2 < y - 5$'
8. $P(x,y)$: '$x^3 < y + \pi$'
9. $P(x,y)$: '$p = \frac{n+m}{2}$'

2.2.3. Traducción de fórmulas cuantificadas

Enumeraremos aquí las fórmulas de algunas expresiones usadas con frecuencia en matemáticas y cuya traducción podría generar confusión.

En las frases a continuación, los símbolos $\bigstar, \blacksquare$ y $\blacklozenge$, indican cualidades para elementos en un universo de discurso U. Los nombramiemntos necesarios son:

Nombramientos:

$S(x)$: 'x es $\bigstar$'. $\quad Z(x)$: 'x es $\blacklozenge$'. $\quad B(x)$: 'x es $\blacksquare$'.

	Frase:	**Traducción:**
1.	'Todas las $\bigstar$ son $\blacklozenge$'.	$\forall x[S(x) \to Z(x)]$
2.	'Algunas $\bigstar$ son $\blacklozenge$'.	$\exists x[S(x) \wedge Z(x)]$
3.	'Las $\bigstar$ y los $\blacksquare$ son $\blacklozenge$'.	$\forall x[S(x) \vee B(x) \to Z(x)]$
4.	Hay elementos de U que son $\bigstar$, pero también son $\blacksquare$'.	$\exists x[S(x) \wedge B(x)]$
5.	Ningún $\bigstar$ es $\blacksquare$'.	$\neg\exists x[S(x) \wedge B(x)]$
5.	No hay un $\bigstar$ que sea $\blacksquare$'.	$\neg\exists x[S(x) \wedge B(x)]$

Veamos algunos ejemplos de estas traducciones.

Ejemplo 2.2.7.

El universo de discurso es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

Frase:	'Los pares y los impares son mayores o iguales a cero'.
Nombramientos:	$P(x)$: 'x es par'. $I(x)$: 'x es impar'. $M(x)$: '$x \geq 0$'.
Traducción:	$\forall x[P(x) \vee I(x) \rightarrow M(x)]$

La dificultad de este problema radica en que la frase incluye un '$\ldots y \ldots$' que nos empuja a traducir la frase con una conjunción, de la siguiente manera:

$$\forall x[P(x) \wedge I(x) \rightarrow M(x)]$$

Pero si hacemos la lectura de esta frase obtendriamos:

'Todo número natural que es par e impar simultáneamente es mayor o igual a cero.'

Las dos frases son verdaderas pero no expresan la misma idea. En la frase original la expresión 'Los pares y impares son mayores o iguales a cero' indica que 'Tanto los números pares, como los números impares son mayores o iguales a cero'. Es decir que si x es par entonces $x \geq 0$, pero también se cumple esta condición en el caso de que x es impar.
La segunda frase por su parte expresa que si un número x es par e impar simultáneamente, entonces ese número será mayor o igual a cero. Sabemos que un número así no existe y eso es lo que hace la implicación verdadera.

Ejemplo 2.2.8.

El universo de discurso es el conjunto de la funciones reales Φ.

Frase:	'Algunas funciones son continuas, pero no son derivables'.
Nombramientos:	$C(f)$: 'f es continua.' $D(f)$: 'f es derivable'.
Traducción:	$\exists f[C(f) \wedge \neg D(f)]$

En una frase en la que se listan las características de posiblemente uno o mas elementos cuya existencia se esta afirmando, cada una de esas caracteristicas se introduce en una conjunción. Dicha conjunción expresará la descripción de tales elementos. Podríamos llegar a confundirnos con la traducción:

$$\exists f[C(f) \rightarrow \neg D(f)]$$

Que corresponde a la frase:

'Si existe una función real continua, ésta no es derivable.'

Esta última frase no esta afirmando la existencia de ningún elemento particular, y al no hacerlo, no puede estar describiendo. Por el contrario la frase original si lo hace.

Ejemplo 2.2.9.

El universo de discurso es el conjunto de la funciones reales Φ.

Frase: ‘Toda función derivable es continua’.

Nombramientos: $C(f)$: ‘f es continua.’
$D(f)$: ‘f es derivable’.

Traducción: $\forall f[D(f) \to C(f)]$

El conjunto de las funciones reales tiene funciones que no son continuas, así que para concluir que una función es continua debemos dar una condición suficiente. En el caso del ejemplo esa condición suficiente es que la función sea derivable. Es posible que al confundirnos lleguemos a plantear como traducción a:

$$\forall f[D(f) \wedge C(f)]$$

Esta traducción corresponde a la frase:

‘Todas las funciones son derivables y continuas.’

La frase original corresponde a un conocido resultado del cálculo diferencial. Por el contrario, esta última frase es falsa.

Observación 13. *La traducción de una misma frase puede cambiar con el universo de discurso.*

Ejemplo 2.2.10.

Para la frase a continuación, veamos como cambia la traducción cuando pasamos del universo de discurso de los números irracionales al universo de los reales.

Frase: ‘Los múmeros irracionales tienen expresión decimal infinita no periódica .’

Nombramientos: $D(x)$: ‘x tiene expresión decimal infinita.’
$P(x)$: ‘x tiene expresión decimal periódica’.
$I(x)$: ‘x es un número irracional’.

La tradución en el universo de discurso $\mathbf{Q}'$ es:

$$\forall x[D(x) \wedge \neg P(x)]$$

Y en el universo de discurso $\mathbf{R}$ es:

$$\forall x[I(x) \to D(x) \wedge \neg P(x)]$$

Ejercicios 2.2.4.

I. Traduzca las siguientes frases y determine cual es verdadera y cual falsa. Use solo predicados unarios y en lo posible prefiera las expresiones algebraicas a las frases.

1. ‘Todo número racional se puede expresar como una fracción irreducible’. Universo de discurso: $\mathbb{R}$.
2. ‘Las funciones son relaciones’. Universo de discurso: Objetos matemáticos.
3. ‘Todo número natural o bien es par, o es impar’.Universo de discurso: $\mathbb{N}$.
4. ‘No hay un número racional cuyo denominador sea cero’.Universo de discurso: $\mathbb{Q}$.
5. ‘Los racionales y los irracionales son números reales’.Universo de discurso: $\mathbb{C} = \ Complejos$
6. ‘Ningún número negativo tiene raíz cuadrada’.Universo de discurso: $\mathbb{Z}$.
7. ‘Cero es el módulo para la suma de números reales’.Universo de discurso: $\mathbb{R}$.
8. ‘Uno es el módulo para el producto de los números reales’. Universo de discurso: $\mathbb{R}$.
9. ‘Si a un número natural le sumamos uno, el resultado es un número natural mayor’. Universo de discurso: $\mathbb{N}$.
10. ‘Un número divisible por dos, es un número par’. Universo de discurso: $\mathbb{N}$.
11. ‘Los números divisibles por 2 y por 3 son divisibles por 6’. Universo de discurso: $\mathbb{Z}$.
12. ‘Un número divisible por ocho es divisible por cuatro’. Universo de discurso: $\mathbb{Z}$.

2.2.4. Traducción a fórmulas con cuantificadores anidados

Listaremos algunas frases comunes en matemática, cuya traducción incluye cuantificadores anidados.

Nombramientos:

$R(x, y)$: 'x se relaciona con y'

	Frase:	**Traducción:**
1.	'Todo elemento se relaciona con algún otro'.	$\forall x \exists y R(x, y)$
2.	'Hay un elemento con quien todo elemento se relaciona'.	$\exists y \forall x R(x, y)$
3.	'Hay un elemento que se relaciona con todos'.	$\exists x \forall y R(x, y)$
4.	'Ninguno se relaciona con todos los demás'.	$\neg \exists x \forall y R(x, y)$
5.	'Hay alguno con quien ninguno se relaciona'.	$\exists x \forall y \neg R(y, x)$
6.	'Hay alguno que se relaciona con ninguno'.	$\exists x \forall y \neg R(x, y)$

Las siguientes fórmulas son usadas para plantear la unicidad de alguna propiedad. El símbolo $\bigstar$ representa una cualidad.

Nombramientos:

$S(x)$: 'x es $\bigstar$'.

	Frase:	**Traducción:**
1.	'Existe un único elemento que es $\bigstar$ '.	$\exists x\{S(x) \wedge \forall y[y \neq x \rightarrow \neg S(y)]\}$
2.	'Existen sólo dos $\bigstar$ '.	$\exists x \exists y\{S(x) \wedge S(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z[z \neq x \wedge z \neq y \rightarrow \neg S(z)]\}$

Para la primera frase hicimos la traducción para la existencia única de un elemento; en la segunda la existencia única de dos elementos. Podemos continuar traduciendo las frases sobre unicidad para más elementos, pero se dejarán como ejercicios, dado que la ide es la misma.

En el siguiente capítulo veremos los resultados que nos permiten plantear las siguientes equivalencias, y así concluir que estas dos últimas fórmulas, tienen cuantificadores anidados.

$$\begin{aligned}
\exists x\{S(x) \wedge \forall y[y \neq x \rightarrow \neg S(y)]\} &\equiv \exists x \forall y\{S(x) \wedge [y \neq x \rightarrow \neg S(y)]\} \\
\exists x \exists y\{S(x) \wedge S(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z[z \neq x \wedge z \neq y \rightarrow \neg S(z)]\} &\equiv \exists x \exists y \forall z\{S(x) \wedge S(y) \wedge x \neq y \wedge \\
&\qquad [z \neq x \wedge z \neq y \rightarrow \neg S(z)]\}
\end{aligned}$$

Ejercicios 2.2.5.

I. Traduzca las frases que aparecen a continuación y diga si es verdadera o falsa. Utilice expresiones algebraicas.

1. Para cada número natural hay otro mayor.
2. Existe un número natural tal que no hay otro que sea menor que éste.

3. Para todo elemento del dominio existe un único elemento del codominio que es su imagen por medio de una función.
4. Dado un par de números reales, éstos son iguales o uno es mayor que el otro.
5. El opuesto aditivo de todo número entero es también entero.
6. Todo número real diferente de cero tiene inverso multiplicativo.
7. Para toda función f, si los números reales $x < y$ se deduce que $f(x) < f(y)$.
8. Si el producto de dos números reales es cero, entonces uno de los dos debe ser cero.
9. Hay algunas funciones f para las que se cumple $f(x) = f(-x)$ con x un número real cualquiera.
10. Existen funciones f tales que si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$, para todo par de números reales x, y.
11. Para todo par de números reales x, y tales que $x < y$ se cumple que $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.
12. Algunos números naturales son el duplo de otro.
13. Todos los números naturales son el duplo de otro.
14. Algunos números reales son el duplo de otro.
15. Cada número real es el duplo de otro.

2.3. Equivalencias

También son válidas para fórmulas completamente cuantificadas las equivalencias entre proposiciones que estudiamos en el capítulo 1. En esta sección indicaremos sólo las equivalencias nuevas: las que permiten manipular los cuantificadores.

Definición 17.
A diferencia de las equivalencias de la sección 1.5.3, solo dos de estas equivalencias tienen nombre. Para las demás colocaremos un número para poder referirlas más adelante.
Como conocemos lo que significa una equivalencia entre proposiciones entonces las primeras reglas serán las de fórmulas totalmente cuantificadas. Luego listaremos las que involucran predicados y enunciaremos una breve explicación de lo que la equivalencia entre éstos significa.

	Nombre	**Equivalencia**
Proposiciones	(1)	$\forall x P(x) \equiv \forall z P(z)$ $\exists x P(x) \equiv \exists z P(z)$
	(2)	$\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \equiv \forall x[P(x) \wedge R(x)]$ $\exists x P(x) \vee \exists x R(x) \equiv \exists x[P(x) \vee R(x)]$
	Leyes de Morgan (LM)	$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$
Predicados	(3)	$P(z) \vee \forall x R(x) \equiv \forall x[P(z) \vee R(x)]$ $P(z) \wedge \forall x R(x) \equiv \forall x[P(z) \wedge R(x)]$
	(4)	$P(z) \vee \exists x R(x) \equiv \exists x[P(z) \vee R(x)]$ $P(z) \wedge \exists x R(x) \equiv \exists x[P(z) \wedge R(x)]$

Definición 18. La equivalencia entre predicados se verifica cuando al reemplazar las variables libres por elementos cualesquiera del universo de discurso, siempre se obtiene una equivalencia de proposiciones.

Observemos que las propiedades de equivalencia respecto a los cuantificadores que aparecen aquí involucran sólo la conjunción, la disyunción y la negación. Estas propiedades no aplican a fórmulas con conectivos diferentes.

En las reglas (3) y (4) es muy importante observar que el predicado $P(z)$ tiene una variable libre z diferente a la variable x ligada por la cuantificación.

Los siguientes pares de fórmulas no son equivalentes, lo señalamos para tener presente este hecho:

$$\begin{array}{l}
(1)\ \forall x P(x) \vee \forall x R(x) \not\equiv \forall x[P(x) \vee R(x)] \\
(2)\ \ \exists x P(x) \wedge \exists x R(x) \not\equiv \exists x[P(x) \wedge R(x)] \\
(3)\ \ \forall x B(x,z) \not\equiv \forall z B(z,z) \\
(4)\ \ \exists x B(x,z) \not\equiv \exists z B(z,z)
\end{array}$$

Ejemplo 2.3.1.

Para verificar la no equivalencia de las fórmulas en (1) y en (2) basta considerar los predicados $P(x)$: 'x es par' y $R(x)$: 'x es impar' en $\mathbb{N}$. La no equivalencia en (3) y (4) se infiere de observar que la fórmula de la izquierda es un predicado y la de la derecha es una proposición.

En el siguiente ejemplo transformamos dos fórmulas mediante equivalencias. La primera deja la impresión de que se puede manipular la cuantificación con respecto a la implicación; la otra desvirtua dicha impresión.

Ejemplo 2.3.2.

Apliquemos las reglas de equivalencia a la fórmula $\forall x\,[F(x) \wedge P(x) \to \exists y M(x,y)]$ hasta obtener una fórmula de cuantificadores anidados a la izquierda.

$$\begin{array}{lll}
\forall x \left[F(x) \wedge P(x) \to \exists y M(x,y) \right] & \equiv \forall x \left[\neg\, [F(x) \wedge P(x)] \vee \exists y M(x,y) \right] & (IM) \\
 & \equiv \forall x \exists y\, [\neg [F(x) \wedge P(x)] \vee M(x,y)] & (3) \\
 & \equiv \forall x \exists y\, [F(x) \wedge P(x) \to M(x,y)] & (IM)
\end{array}$$

Hagamos lo análogo con la fórmula $\exists x\,[\forall y S(y) \to T(x,z)]$

$$\begin{array}{lll}
\exists x\,[\forall y S(y) \to T(x,z)] & \equiv \exists x\,[\neg \forall y S(y) \vee T(x,z)] & (IM) \\
 & \equiv \exists x\,[\exists y \neg S(y) \vee T(x,z)] & (LM) \\
 & \equiv \exists x \exists y\,[\neg S(y) \vee T(x,z)] & (3) \\
 & \equiv \exists x \exists y\,[S(y) \to T(x,z)] & (LM)
\end{array}$$

En el caso de que el universo de discurso sea finito surge un par de equivalencias adicionales. Éstas evidencian el porqué las equivalencias de la negación de fórmulas cuantificadas también se llaman leyes de Morgan.

Observación 14.

Si una fórmula es una cuantificación de un predicado $P(x)$ con universo de discurso finito $U = \{a_1, a_2, a_3, ...a_n\}$ entonces se cumplen las siguientes equivalencias:

$$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \ldots \wedge P(a_n)$$
$$\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \ldots \vee P(a_n)$$

Ejercicios 2.3.1.

I. Use las equivalencias para transformar, siempre que sea posible, las siguientes fórmulas en otras con cuantificaciones anidadas a la izquierda.

1. $\exists x R(x,y) \to [\exists z P(z,y) \wedge \forall y Q(y)]$
2. $R(x,y) \leftrightarrow \forall x T(x) \wedge \exists z S(z)$
3. $\exists x\, [\forall y S(y) \to T(x,y)]$
4. $\neg\, [\forall x R(x) \wedge Q(z) \leftrightarrow \exists y S(y)]$
5. $\neg \forall x P(x,z) \to \forall x Q(x,u)$
6. $\forall z \exists x (Ex \wedge Az \wedge \forall y (D(x,y) \to Ey))$
7. $\exists x (Ex \wedge Az \vee \neg \forall y (D(x,y) \to Ey))$
8. $\neg \exists x\, [\forall z P(z) \to R(x,y)]$
9. $\neg [\forall y R(x,y) \vee \exists z T(x,z)]$
10. $\forall x \neg\, [\exists y R(x,y) \to S(x)]$

II. Diga porque los siguientes pares de fórmulas:

$$\begin{array}{lll} i) & \alpha : \text{`}\forall x P(x) \vee \forall x R(x)\text{'} & \text{y } \beta : \text{`}\forall x[P(x) \vee R(x)]\text{'} \\ ii) & \gamma : \text{`}\exists x P(x) \wedge \exists x R(x)\text{'} & \text{y } \delta : \text{`}\exists x[P(x) \wedge R(x)]\text{'} \end{array}$$

no son equivalentes. Es decir $\alpha \not\equiv \beta$ y $\gamma \not\equiv \delta$.

III. Diga porqué las equivalencias:

$$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \ldots \wedge P(a_n)$$
$$\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \ldots \vee P(a_n)$$

son ciertas en un universo de discurso finito.

IV. Diga que relación hay entre las leyes de Morgan de esta sección con las de la sección 1.5.3.

V. Aplique las leyes de Morgan a las ocho fórmulas obtenidas de negar las cuantificaciones anidadas las dos variables del predicado $P(x,y)$.

$$\begin{array}{ll} (1)\neg \forall x \forall y P(x,y) & (5)\neg \forall y \forall x P(x,y) \\ (2)\neg \exists x \exists y P(x,y) & (6)\neg \exists y \exists x P(x,y) \\ (3)\neg \forall x \exists y P(x,y) & (7)\neg \exists y \forall x P(x,y) \\ (4)\neg \exists x \forall y P(x,y) & (8)\neg \forall y \exists x P(x,y). \end{array}$$

2.4. Reglas de inferencia

La reglas de inferencia de la sección 1.4 aplican para fórmulas mas generales como las que hemos construido en este capítulo. En esta sección como en la anterior, listaremos unas pocas nuevas reglas y mostraremos algunos ejemplos de su uso. No obstante, notaremos que el ejercicio de probar argumentos válidos consiste en conducir la prueba a una prueba de argumentos válidos de proposiciones.

Particularizaciones:

Abreviatura	**Nombre**	**Regla**
(PU)	Particularización Universal	$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(x)}$ para x cualquier elemento del universo de discurso.
(PE)	Particularización Existencial	$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(a)}$ para a un elemento específco del universo de discurso.

Generalizaciones:

Abreviatura	**Nombre**	**Regla**
(GU)	Generalización Universal	$P(x)$ para x cualquier elemento del universo de discurso. ――――― $\therefore \forall x P(x)$
(GE)	Generalización Existencial	$P(a)$ para a un elemento specífco del universo de discurso. ――――― $\therefore \exists x P(x)$

En estas reglas de inferencia se pasa de la simbología a las palabras. No obstante, en el contexto de una prueba de validez cuando aplicamos estas leyes se entiende que si usamos una de las primeras letras del alfabeto $a, b, c, d, ...$, entonces se trata de una constante en el universo de discurso y por lo tanto se relaciona a la aplicación de las leyes de particularización o generalización existencial. En el caso en que usemos las últimas letras del alfabeto $..., x, y, z$, entonces se trata de variables en el universo y sabremos que hemos aplicado particularización universal o que podemos aplicar generalización universal.

2.4.1. Argumentos Válidos

En una prueba de validez que incluya fórmulas cuantificadas lo primero que debemos hacer es aplicar las leyes de particularización, luego las leyes de inferencia de las proposiciones y finalmente las leyes de generalización. En estas pruebas abreviaremos la escritura de la reglas de generalización y particularización. Veremos cómo en los ejemplos después de la siguiente observación.

Observación 15. *Si hay premisas con cuantificación existencial en el argumento, la ley de particularización existencial debe ser la primera que apliquemos al hacer una prueba de validez, y la letra que se use debe ser nueva en la prueba.*

Ejemplo 2.4.1.

Argumento	**Prueba**	
$\exists x[C(x) \wedge \neg B(x)]$	$1.\exists x[C(x) \wedge \neg B(x)]$	
$\forall x[C(x) \to P(x)]$	$2.\forall x[C(x) \to P(x)] / \therefore \exists x[\neg B(x) \wedge P(x)]$	
―――――	$3.C(a) \wedge \neg B(a)$	$1(PE)$
$\therefore \exists x[\neg B(x) \wedge P(x)]$	$4.C(a) \to P(a)$	$2(PU)$
	$5.C(a)$	$3(Simp)$
	$6.P(a)$	$5, 4(MP)$
	$7.\neg B(a)$	$3(Simp)$
	$8.P(a) \wedge \neg B(a)$	$6, 7(Conj)$
	$9.\exists x[P(x) \wedge \neg B(x)]$	$8(GE)$

La primera ley que se aplica es (PE) en el reglón 3, usamos la letra a para indicar que es el elemento específico del universo de discurso que verifica a la premisa $\exists x[C(x) \wedge \neg B(x)]$. En el reglón 4 aplicamos (PU) y usamos la misma letra a, ésto porque la segunda premisa afirma que $C(x) \to P(x)$ se cumple para todo elemento x del universo de discurso, en particular para el elemento específico a. En los renglones 5,6, 7 y 8 se usan las leyes de equivalencia para proposiciones. En el reglón 8 se ha inferido que el predicado $P(x) \wedge \neg B(x)$ se cumple para el elemento a, lo que significa que podemos obtener la conclusión del argumento con la ley de generalización (GE).

Ejemplo 2.4.2.

Argumento	**Prueba**	
$\forall x[D(x) \to \neg E(x)]$	$1.\forall x[D(x) \to \neg E(x)]$	
$\forall x[F(x) \to E(x)]$	$2.\forall x[F(x) \to E(x)] / \therefore \forall x[F(x) \to \neg D(x)]$	
	$3.D(x) \to \neg E(x)$	$1(PU)$
$\therefore \forall x[F(x) \to \neg D(x)]$	$4.F(x) \to E(x)$	$2(PU)$
	$5.E(x) \to \neg D(x)$	$3(Cont)(DN)$
	$6.F(x) \to \neg D(x)$	$5,4(SH)$
	$7.\forall x[F(x) \to \neg D(x)]$	$6(GU)$

La primera ley que se aplica es (PU) en el reglón 3 y usamos la variable x para indicar que se trata de cualquier elemento del universo. En el reglón 4 aplicamos de nuevo (PU) y usamos la misma letra x ya que se trata de otro cuantificador universal. En el reglón 6 inferimos $F(x) \to \neg D(x)$ con ayuda de las leyes para proposiciones. Como x es variable, se concluye lo que quremos con la ley de generalización (GU).

Para que aclaremos la razón por la cual la ley de particularización existencial debe aplicarse primero, reescribiremos la prueba de válidez del primer argumento del ejemplo anterior haciendo caso omiso de ésta condición.

Ejemplo 2.4.3.

Argumento	**Prueba**	
$\exists x[C(x) \wedge \neg B(x)]$	$1.\exists x[C(x) \wedge \neg B(x)]$	
$\forall x[C(x) \to P(x)]$	$2.\forall x[C(x) \to P(x)] / \therefore \exists x[\neg B(x) \wedge P(x)]$	
	$3.C(x) \to P(x)$	$2(PU)$
$\therefore \exists x[\neg B(x) \wedge P(x)]$	$4.C(a) \wedge \neg B(a)$	$1(PE)$
	$5.?$	

Aplicamos en el reglón 3 la ley de (PU), así que usamos la variable x para indicar $P(x)$ se cumple para todo elemento del universo de discurso. En el reglón 4 aplicamos (PE), sin embargo no podemos usar la misma letra x porque una fórmula existencial se verifica con un elemento específico del universo de discurso, no con cualquiera. Luego usamos una letra diferente a tal y como lo refiere la observación 15. En consecuencia la prueba queda paralizada pues $C(x)$ y $C(a)$ son diferentes.

Cuando un argumento tiene más de una premisa existencial, nos encontramos en una de las dos situaciones siguientes: La primera es que el argumento no es válido; la segunda es que una de las dos premisas no será usada en la prueba. Veamoslo en los ejemplos a continuación.

Argumento		
$\exists x[D(x) \wedge R(x)]$	$1.\exists x[D(x) \wedge R(x)]$	
$\exists x[F(x) \wedge R(x)]$	$2.\exists x[F(x) \wedge R(x)] / \therefore \exists x[D(x) \wedge F(x)]$	
	$3.D(a) \wedge R(a)$	$1(PE)$
$\therefore \exists x[D(x) \wedge F(x)]$	$4.F(b) \wedge R(b)$	$2(PE)$
	$5.D(a)$	$3(Simp)$
	$6.F(b)$	$4(Simp)$
	$7.D(a) \wedge F(b)$	$5,6(Conj)$
	$8.?$	

En el reglón 3 al aplicar (PE) usamos la constante a que sería el elemento de U para el cual se cumple $D(a) \wedge R(a)$. Cuando aplicamos (PE) en el reglón 4 debemos usar una constante que represente al elemento de U que sirve de testigo para la fórmula $\exists x[F(x) \wedge R(x)]$. Sin embargo, no tiene que ser el mismo elemento de U que sirva de testigo para las dos fórmulas existenciales. Luego, por rigor, debemos usar otra letra. Pero ésto signifca de nuevo que la prueba queda paralizada pues para aplicar (GE) en el reglón 8 deberíamos tener en el 7 la proposición $D(a) \wedge F(a)$ o la proposición $D(b) \wedge F(b)$, dado que estamos buscando un elemento tal que verifique los dos predicados D y F. En realidad este argumento es inválido. Pero si analizamos la situación, aunque el argumento fuera válido, no podríamos usar dos premisas existenciales.

Ejercicios 2.4.1.

I. Haga la prueba de validez de los siguientes argumentos.

1)
$$\begin{array}{l} \forall x[P(x) \to C(x)] \\ \exists x P(x) \\ \hline \therefore \exists x C(x) \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} \forall x[C(x) \to V(x)] \\ \exists x[H(x) \wedge C(x)] \\ \hline \therefore \exists x[H(x) \wedge V(x)] \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l} \forall x[G(x) \to H(x)] \\ \forall x[I(x) \to \neg H(x)] \\ \hline \therefore \forall x[I(x) \to \neg G(x)] \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{l} \exists x[J(x) \wedge \neg K(x)] \\ \forall x[J(x) \to L(x)] \\ \hline \therefore \exists x[L(x) \wedge \neg K(x)] \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{l} \forall x[C(x) \to V(x)] \\ \exists x[\neg V(x) \wedge C(x)] \\ \hline \therefore \exists x M(x) \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l} \forall x[V(x) \leftrightarrow H(x)] \\ \forall x[V(x) \to \neg S(x)] \\ \hline \therefore \forall x[H(x) \to \neg S(x)] \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{l} \forall x[A(x) \to D(x) \vee V(x)] \\ \forall x[\neg D(x) \vee \neg P(x)] \\ \exists x[A(x) \wedge P(x)] \\ \hline \therefore \exists x[A(x) \wedge V(x)] \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{l} \forall x[R(x) \to D(x) \vee V(x)] \\ \forall x[D(x) \to \neg P(x)] \\ \exists x[R(x) \wedge P(x)] \\ \hline \therefore \exists x[R(x) \wedge V(x)] \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{l} \forall x[A(x) \vee S(x) \to G(x) \vee V(x)] \\ \exists x[S(x) \wedge \neg G(x)] \\ \hline \therefore \exists x[S(x) \wedge V(x)] \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{l} \neg\exists x[O(x) \wedge \neg C(x)] \\ \neg\exists x[A(x) \wedge P(x)] \\ \neg\forall x[A(x) \to C(x)] \\ \hline \therefore \neg\forall x[O(x) \vee P(x)] \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{l} \exists x[B(x) \wedge A(x) \wedge \neg I(x)] \\ \forall x[B(x) \to G(x)] \\ \neg\forall x[B(x) \to A(x)] \\ \forall x[L(x) \to A(x)] \\ \hline \therefore \neg\forall x[G(x) \to L(x)] \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{l} \forall x[R(x) \to D(x) \vee V(x)] \\ \neg\exists x[D(x) \wedge C(x)] \\ \exists x[R(x) \wedge C(x)] \\ \hline \therefore \exists x[R(x) \wedge V(x)] \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{l} \forall x[\neg T(x) \to P(x)] \\ \forall x[F(x) \to C(x)] \\ \neg\forall x\neg[F(x) \wedge \neg P(x)] \\ \hline \therefore \exists x T(x) \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{l} \forall x[N(x) \to D(x)] \\ \forall x[L(x) \to A(x)] \\ \hline \therefore \forall x[N(x) \wedge L(x) \to D(x) \vee A(x)] \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{l} \neg\exists x[O(x) \wedge \neg C(x)] \\ \neg\exists x[A(x) \wedge P(x)] \\ \neg\forall x[A(x) \to C(x)] \\ \hline \therefore \neg\forall x[O(x) \vee P(x)] \end{array}$$

16) $\forall x[N(x) \to D(x)]$
$\forall x[L(x) \to A(x)]$

$\therefore \forall x[N(x) \vee L(x) \to D(x) \vee A(x)]$

2.4.2. Argumentos inválidos

Cuando hacemos la prueba de un argumento válido, no nos preguntamos en que universo de discurso éste es válido. Esto es porque cuando se completa una prueba de validez se ha probado el argumento para todos los universos de discurso. Ahora cuando queremos probar que un argumento no es válido, lo primero que tenemos que encontrar es un universo de discurso en el que podamos mostrar la invalidez del mismo.

A simple vista, este ejercicio no parece fácil. Sin embargo, el método para encontrar el universo de discurso es sencillo, siempre que éste sea finito.

Listaremos los pasos a seguir para encontrar el universo U en el que no se cumple, e iremos ilustrando el método con un ejemplo.

Ejemplo 2.4.4.
El argumento a continuación es inválido.

$$\begin{array}{l} \exists x[D(x) \wedge R(x)] \\ \exists x[F(x) \wedge R(x)] \\ \hline \therefore \exists x[D(x) \wedge F(x)] \end{array}$$

Comenzamos por revisar como es el argumento en un universo con un único elemento $U = \{a\}$. Si aplicamos lo señalado en la observación 14 entonces el argumento en este universo queda como sigue:

$$\begin{array}{l} D(a) \wedge R(a) \\ F(a) \wedge R(a) \\ \hline \therefore D(a) \wedge F(a) \end{array}$$

Recordemos que al sustituir las variables por elementos del universo obtenemos proposiciones. Así que éste es un argumento de proposiciones. Sin embargo, este argumento es válido, así que si el argumento original es inválido el universo de discurso $U = \{a\}$ no sirve de contraejemplo.

Intentemos ahora con un universo de discurso de dos elementos $U = \{a, b\}$. De nuevo aplicando la observación 14 obtenemos:

$$\begin{array}{l} [D(a) \wedge R(a)] \vee [D(b) \wedge R(b)] \\ [F(a) \wedge R(a)] \vee [F(b) \wedge R(b)] \\ \hline \therefore [D(a) \wedge F(a)] \vee [D(b) \wedge F(b)] \end{array}$$

Este argumento si es inválido. Siguiendo los pasos para obtener la valuación que hace las premisas verdaderas y la conclusión falsa, obtenemos la valuación:

D(a)	R(a)	F(a)	D(b)	R(b)	F(b)
F	V	V	V	V	F

En este ejemplo sólo ha sido necesario inspeccionar los universos de discurso de uno y dos elementos. En el caso en que en estos dos no logremos la prueba de invalidez, entonces verifica para el universo de tres elementos.

Observación 16. *Si para un argumento de fórmulas cuantificadas logramos una prueba de validez, entonces no será posible encontrar un universo de discurso para el cual el argumento sea inválido. Recíprocamente, si encontramos un universo de discurso finito en el que el argumento es inválido, entonces no será posible construir una prueba de validez para el argumento.*

En algunos casos no es fácil decidir si un argumento es válido o inválido. La destreza se adquiere con la práctica. Así que será necesario desarrollar todos los ejercicios para que una lectura del argumento nos baste para decidir.

Ejercicios 2.4.2.

I.

1)
$$\begin{array}{l} \exists x[D(x) \wedge A(x))] \\ \forall x[A(x) \leftrightarrow J(x) \vee C(x)] \\ \neg\exists x[J(x) \wedge I(x) \wedge A(x)] \\ \exists x[D(x) \wedge I(x)] \\ \hline \therefore \exists x[D(x) \wedge \neg A(x)] \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} \exists x[M(x) \wedge N(x)] \\ \exists x[M(x) \wedge O(x)] \\ \hline \therefore \forall x[O(x) \rightarrow N(x)] \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l} \forall x[M(x) \rightarrow E(x)] \\ \forall x[M(x) \leftrightarrow B(x)] \\ \hline \therefore \forall x[E(x) \leftrightarrow B(x)] \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{l} \forall x[M(x) \rightarrow F(x)] \\ \exists x[A(x) \wedge F(x)] \\ \hline \therefore \exists x[A(x) \wedge M(x)] \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{l} \exists x[M(x) \wedge C(x)] \\ \exists x[C(x) \wedge \neg R(x)] \\ \hline \therefore \exists x[M(x) \wedge \neg R(x)] \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l} \exists x[\neg C(x) \wedge R(x)] \\ \exists x[F(x) \wedge \neg R(x)] \\ \hline \therefore \neg\exists x[F(x) \wedge R(x)] \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{l} \neg\exists x[P(x) \wedge (D(x) \vee T(x)) \wedge E(x)] \\ \exists x[P(x) \wedge D(x)] \\ \exists x[P(x) \wedge T(x)] \\ \hline \therefore \neg\exists x[P(x) \wedge E(x)] \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{l} \exists x[F(x) \wedge H(x) \wedge \neg I(x)] \\ \forall x[A(x) \leftrightarrow F(x)] \\ \forall x[O(x) \rightarrow H(x)] \\ \hline \therefore \exists x[A(x) \wedge O(x)] \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{l} \exists x[B(x) \wedge \neg C(x)] \\ \forall x[D(x) \rightarrow \neg C(x)] \\ \hline \therefore \forall x[D(x) \rightarrow B(x)] \end{array}$$

2.5. Traducción

2.5.1. Traducción definiciones

En matemáticas es usual encontrar palabras con significados particulares. Dichos significados pueden escribirse en lenguaje lógico puesto que se plantean en un contexto matemático. Esas palabras nombran conceptos que conocemos como definiciones.

Una definición se usa entonces para nombrar algún concepto que aparece con frecuencia en las teorías matemáticas. Una vez nombramos la definición invocamos aquel concepto matemático de forma breve y rigurosa.

En esta sección listaremos algunas definiciones y sus traducciones en lenguaje lógico. Los nombres de estos conceptos serán resaltados en negrilla.

En el siguiente ejemplo se definen algunas propiedades que un número entero puede tener. Es decir, un número entero puede no cumplir esta propiedad, sin embargo el uso frecuente del concepto nos lleva a definirlo y darle un nombre.

Ejemplo 2.5.1.

El universo de discurso es $\mathbb{Z}$.

	Nombre	Definición	Traducción
1.	x es **par**.	Que un número sea par significa que es el duplo de otro.	$\exists y(2y = x)$
2.	x es **impar**.	Que un número sea impar significa que es el duplo de otro mas uno.	$\exists y(2y + 1 = x)$
3.	x es **positivo**.	Que un número sea positivo significa que es mayor a cero.	$x > 0$
4.	x es **negativo**.	Que un número sea negativo significa que es menor a cero.	$x < 0$

La expresión de la derecha es la traducción de la definición. Al dar nombres (palabras en negrilla) a las definiciones, podemos decir que es equivalente nombrar a dar la fórmula que traduce el significado, es decir:

$$(x \text{ es } \textbf{par}) \leftrightarrow \exists y(2y = x)$$
$$(x \text{ es } \textbf{impar}) \leftrightarrow \exists y(2y + 1 = x)$$
$$(x \text{ es } \textbf{positivo}) \leftrightarrow (x > 0)$$
$$(x \text{ es } \textbf{negativo}) \leftrightarrow (x < 0)$$

Veamos otros ejemplos en los que se define una posible relación entre números. Ésto significa que cierto par de números podría no cumplir esta relación, pero dado que es un concepto útil se le asigna un nombre y una definición.

Ejemplo 2.5.2.

El universo de discurso es $\mathbb{Z}$.

	Nombre	Definición	Traducción
1.	y es el **sucesor** de x.	Que y sea el sucesor de x significa que y es el entero más pequeño que es mayor a x.	$(y \geq x) \wedge \forall z(z \geq x \to y \leq z)$
2.	x es **divisible** por y	Que x sea divisible por y si existe un número que al multiplicarlo por y de x.	$\exists z(zy = x)$
3.	x es **opuesto aditivo** de y	Al sumar x y y en cualquier orden, el resultado es cero.	$(x + y = 0) \wedge (y + x = 0)$

Obtenemos entonces las siguientes equivalencias:

$$(y \text{ es el } \textbf{sucesor} \text{ de } x) \leftrightarrow (y \geq x) \wedge \forall z(z \geq x \to y \leq z)$$
$$(x \text{ es } \textbf{divisible} \text{ por } y) \leftrightarrow \exists z(zy = x)$$
$$(x \text{ es } \textbf{opuesto aditivo} \text{ de } y) \leftrightarrow (x + y = 0) \wedge (y + x = 0)$$

Veamos ahora un listado de propiedades que pueden tener las operaciones binarias, es decir las operaciones que involucran dos números. De nuevo, puede existir una operación binaria que no lo cumpla, sin embargo conocemos operaciones que en su mayoría las cumplen. Es por eso que merecen una definición.

Ejemplo 2.5.3.

El universo de discurso es $\mathbb{R}$.

	Nombre	**Definición**	**Traducción**
1.	x es **módulo** para la suma.	Que un número sea módulo para la suma significa que al sumarlo con cualquier otro número en cualquier orden, el resultado es ese otro número.	$\forall y[(x+y=y)\wedge(y+x=y)]$
2.	**Existencia de un módulo** para la suma	La suma tiene un módulo.	$\exists x\forall y[(x+y=y)\wedge(y+x=y)]$
3.	**Conmutativa** de la suma	La suma de un par de números en cualquier orden tiene igual resultado.	$\forall x\forall y(x+y=y+x)$
4.	**Existencia de opuestos** para la suma	Todo número real tiene un opuesto aditivo.	$\forall x\exists y[(x+y=0)\wedge(y+x=0)$

Obtenemos entonces las siguientes equivalencias:

$$
\begin{aligned}
(x \text{ es } \textbf{módulo} \text{ para la suma}) &\leftrightarrow \forall y[(x+y=y)\wedge(y+x=y)]\\
(\textbf{Existencia de un módulo} \text{ para la suma}) &\leftrightarrow \forall x\exists y[(x+y=0)\wedge(y+x=0)\\
(\textbf{Conmutativa} \text{ de la suma}) &\leftrightarrow \forall x\forall y(x+y=y+x)\\
(\textbf{Existencia de opuestos} \text{ para la suma}) &\leftrightarrow \forall x\exists y[(x+y=0)\wedge(y+x=0)
\end{aligned}
$$

El ejemplo a continuación, incluye algunas propiedades que las funciones reales pueden cumplir.

Ejemplo 2.5.4.

El universo de discurso es el conjunto de las funciones reales.

	Nombre	**Definición**	**Traducción**
1.	f es una **función creciente**.	Que f sea una función creciente significa que las imágenes de dos números reales, uno menor o igual al otro, conservan esta relación.	$\forall x\forall y[(x\leq y)\rightarrow(f(x)\leq f(y))]$
2.	f es una **función inyectiva**.	Que f sea una función inyectiva significa que las imágenes de dos números reales diferentes, son diferentes.	$\forall x\forall y[(x\neq y)\rightarrow(f(x)\neq f(y))]$

Obtenemos entonces las siguientes equivalencias:

$$
\begin{aligned}
(f \text{ es una } \textbf{función creciente}) &\leftrightarrow \forall x\forall y[(x\leq y)\rightarrow(f(x)\leq f(y))]\\
(f \text{ es una } \textbf{función inyectiva}) &\leftrightarrow \forall x\forall y[(x\neq y)\rightarrow(f(x)\neq f(y))]
\end{aligned}
$$

Algunas definiciones no sólo generan un nombrre sino también una simbología. Por el ejemplo, la definición de 'x divide a y' se simboliza por $x|y$.

El último ejemplo que traduciremos es la definición rigurosa de límite. Escribiremos entonces la definición en el formato formal en el que las definiciones se presentan y posteriormente listaremos la equivalencia que resulta. Veremos que el límite es una de las definiciones que genera simbología.

Definición 19.

Se dice que L es el **límite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-a| < \delta$ entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$. Simbólicamente se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Simbología:		**Traducción:**
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$	$\leftrightarrow$	$\forall\varepsilon\,\{(\varepsilon>0)\to\exists\delta\,[(\delta>0)\wedge\forall x(\lvert x-a\rvert<\delta\to\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon)]\}$

Quedan aún muchas definiciones por traducir. No obstante, los ejemplos listados en esta sección sirven de referencia para las mayoría de las traducciones importantes que faltan. Dejaremos varias de estas como ejercicio.

Ejercicios 2.5.1.

I. Traduzca las siguientes definiciones.

1. Un número entero x es **divisor** de otro número entero y, si existe un entero que al multiplicarlo por x de y.
2. Un número entero x es **divisor propio** de otro número entero y, si es divisor de y y $x < y$.
3. Un número entero x es **divisor positivo** de otro número entero y, si es divisor de y y $0 < x$.
4. Los enteros x y y son **primos entre sí**, si el único divisor que comparten es 1.
5. Un número entero es **primo** si es mayor que uno y no tiene divisores diferentes a uno y si mismo.
6. Un número entero x es **múltiplo** de y, si al multiplicar a y por otro entero se obtiene x.
7. Un número real x es **racional**, si existen dos números enteros, uno de ellos no nulo, tal que x es el cociente de éstos, donde el divisor es el entero no nulo.
8. Un número real x es **módulo** para el producto si al multiplicarlo con cualquier real y, en cualquier orden el resultado es y.
9. Un número real x tiene **inverso multiplicativo** si existe otro real que al multiplicarlo con x, da como resultado 1.
10. La suma cumple la propiedad **asociativa**.
11. La suma y el producto cumplen la propiedad **distributiva**.
12. El producto cumple la **existencia de inverso multiplicativo** para todos los números reales diferentes de cero.
13. Un número entero es **perfecto** si es mayor que 1, y si es la suma de sus divisores propios positivos.

II. Escriba la traducción de las siguientes frases, usando la traducción de la definición o la simbología de las palabras en negrilla.

1. Existe un único **módulo** para la suma.
2. Existe un único **módulo** para el producto.
3. 1 es el **módulo** del producto de reales.

III. Averigue y traduzca cada una de las siguientes definiciones. Plantee las equivalencias asociadas a éstas.

1. Racional irreducible.
2. Función par.
3. Función impar.
4. Función sobreyectiva.
5. Función biyectiva.
6. Función decreciente.
7. Función estrictamente creciente.
8. Función estrictamente decreciente.
9. Propiedades de la potenciación.
10. Propiedad reflexiva del orden de los reales.
11. Propiedad antisimétrica del orden de los reales.
12. Propiedad transitiva del orden de los reales.
13. Cota superior de un conjunto.
14. Cota inferior de un conjunto.
15. Máximo de un conjunto.
16. Mínimo de un conjunto.
17. Supremo de un conjunto.
18. Infimo de un conjunto.
19. Propiedades de las desigualdades de los reales.
20. Límite lateral izquierdo.
21. Límite lateral derecho.
22. Asíntota vertical.
23. Asíntota horizontal.
24. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
25. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.
26. Función continua en a.
27. Función continua.

IV. Traduzca los siguientes enunciados de teoremas. Use las definición o la simbología de las palabras en negrilla.

1. La suma de dos números **positivos** es mayor a cada uno.
2. Todo número natural tiene un **sucesor**.
3. El **límite de una función** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a existe, si y sólo si los **límites laterales** existen.

2.5.2. Traducción de teoremas y demostraciones

Los teoremas enuncian una verdad en un contexto matemático específico (teorías matemáticas). La demostración logra las premisas y el argumento válido cuya conclusión es el enunciado del teorema. Una demostración no suele contener la prueba de validez del argumento que plantea. Esto es porque en general la validez del argumento es, para los matemáticos, la parte 'sobreentendida' de la demostración. En muchos casos, si se compara la dificultad de una prueba de validez con el nivel conocimientos en el área y la creatividad matemática que debe tener quien demuestra, se puede entender porque es considerado innecesario probar la validez.

Recopilar los conocimientos necesarios para hacer demostraciones de cierta teoría de las matemáticas, puede requerir de años de estudio. La creatividad requiere de genio y dedicación. Luego en este curso introductorio lo que aspiramos lograr es identificar y traducir los argumentos planteados en un teorema junto con su demostracíón. En el capítulo 3 estudiaremos algunos argumentos comunmente usados que nos permitiran demostrar algunos teoremas sencillos.

Recordemos entonces que el argumento a la derecha es la representación lógica de un teorema y su demostración.

Teorema:		ϕ_1
ϕ		ϕ_2
Demostración:	$\Leftrightarrow$	$\vdots$
$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \square$		ϕ_n
		$\therefore \phi$

Listemos entonces algunos ejemplos de teoremas junto con sus demostraciones y sus traducciones.

Teorema 2.5.1. *Si el cuadrado de un número entero es par entonces el número es par.*

Demostración. Que x sea un número entero que no es par, significa que x es un número impar. Esto por definición de impar significa que existe un entero k tal que $x = 2k + 1$. Así podemos inferir las siguientes igualdades :

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

Finalmente de la última igualdad concluimos que x^2 es impar. $\square$

A continuación extraemos el argumento lógico detrás de este teorema y su demostración.

Ejemplo 2.5.5.
El universo de discurso para todas las variables es $\mathbb{Z}$.

Nombramientos:	**Traducción:**
$P(x)$: 'x es par'	$\forall x[\neg P(x) \leftrightarrow I(x)]$
$I(x)$: 'x es impar'	$\forall x[I(x) \leftrightarrow \exists y A(x,y)]$
$A(x,y)$: '$x = 2y + 1$'	$\forall x \forall y[A(x,y) \rightarrow B(x,y)]$
$B(x,y)$: '$x^2 = (2y+1)^2$'	$\forall x \forall y[B(x,y) \rightarrow C(x,y)]$
$C(x,y)$: '$x^2 = 4y^2 + 4y + 1$'	$\forall x \forall y[C(x,y) \rightarrow D(x,y)]$
$D(x,y)$: '$x^2 = 2(2y^2 + 2y) + 1$'	$\forall x \forall y[D(x,y) \rightarrow I(x^2)]$
	$\therefore \forall x[P(x^2) \rightarrow P(x)]$

En la prueba de validez de este argumento se requiere aplicar particularización universal a la primera premisa usando x^2. Es decir que un reglón de la prieba será $\neg P(x^2) \leftrightarrow I(x^2)$. Esto es porque el cuadrado de un entero es un entero, luego x^2 se considera entero.

En el siguiente ejemplo completaremos la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional, con detalles que no era posible incluir en el capítulo de cálculo proposicional, dado que no habiamos estudiado los predicados y las fórmulas cuantificadas.

Teorema 2.5.2. *$\sqrt{2}$ es irracional.*

Demostración. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Ésto implica que existen dos números enteros x y y tales que son primos entre sí y que $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$. Así podemos inferir las siguientes igualdades :

$$\begin{aligned} \sqrt{2}^2 &= \frac{x^2}{y^2} \\ 2 &= \frac{x^2}{y^2} \\ 2y^2 &= x^2 \end{aligned}$$

Por definición de par esto equivale a que x^2 es par. Pero del teorema 2.5.1 sabemos que si el cuadrado de un número es par entonces el número es par. Luego inferimos que x es par. Por definición de par esto significa que existe un entero k tal que $x = 2k$ y así inferimos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4k^2 \\ 2y^2 &= 4k^2 \\ y^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

La última igualdad implica que y^2 es par. Ésto implica que y es par. Como x y y son pares entonces x y y no son primos entre sí. $\square$

Ejemplo 2.5.6.
El universo de discurso para todas las variables es $\mathbb{Z}$.

Nombramientos:	**Traducción:**
$R(x)$: 'x es racional'	$R(\sqrt{2})$
$S(x, y)$: 'x y y son primos entre sí'	$\forall z[R(z) \rightarrow \exists x \exists y[S(x, y) \wedge T(x, y)]]$
$T(x, y)$: '$\sqrt{2} = \frac{x}{y}$'	$\forall x \forall y[T(x, y) \rightarrow U(x, y)]$
$U(x, y)$: '$\sqrt{2}^2 = \frac{x^2}{y^2}$'	$\forall x \forall y[U(x, y) \rightarrow V(x, y)]$
$V(x, y)$: '$2 = \frac{x^2}{y^2}$'	$\forall x \forall y[V(x, y) \rightarrow W(x^2, y^2)]$
$W(x, y)$: '$2y = x$'	$\forall x \forall y[W(x^2, y^2) \rightarrow P(x^2)]$
$Q(x, y)$: '$2y = 4x$'	$\forall x[P(x^2) \rightarrow P(x)]$
$P(x)$: 'x es par'	$\forall x[P(x) \rightarrow \exists z W(x, z)]$
	$\forall x \forall y \forall z[W(x, z) \wedge W(x^2, y^2) \rightarrow Q(z^2, y^2)]$
	$\forall z \forall y[Q(z^2, y^2) \rightarrow W(y^2, z^2)]$
	$\forall x \forall y[P(x) \wedge P(y) \rightarrow \neg S(x, y)]$
	$\therefore \neg R(\sqrt{2})$

Veamos un teorema acerca de la continuidad de las funciones. La traducción de éste y su demostración no es una presentación más sencilla a la usual. Sin embargo, la exigencia de dicha traducción además de requerir el pleno entendimiento de la demostración, también nos muestra el grado de dificultad de la lógica que se usa en los primeros cursos de matemáticas.

La traducción que aquí aparece tiene un nivel de rigurosidad mayor a todos los anteriores ejemplos expuestos en este libro. No es de extrañar que sea de dificil lectura. Igualmente la prueba de validez correspondiente tiene un grado superior de dificultad. Algunos de los ejercicios propuestos tienen esta característica, así que se deja a criterio del lector continuar con la lectura y con dichos ejercicios.

Teorema 2.5.3. *Si f y g son funciones continuas en a, entonces la función $f+g$ es continua en a.*

Demostración. Que f y g sean continuas en a significa que:

$$(1) \qquad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
$$(2) \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Por otro lado sabemos por de finición de suma de funciones y propiedades de los límites que:

$$(3) \qquad \lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$$
$$(4) \qquad \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Apartir de igualdades $(1),(2),(3)$ y (4) inferimos las ecuaciones:

$$(5) \qquad \lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
$$(6) \qquad \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a)$$

Luego del hecho de que $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$ y de (6) inferimos que $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = (f+g)(a)$ □

Ejemplo 2.5.7.

El universo de discurso para las variables f y g es el conjunto de las funciones reales, y para la variable z es $\mathbb{R}$.

Nombramientos:	**Traducción:**
$C(f,z)$: 'f es continua en z'	$\forall f \forall g \forall z[C(f,z) \leftrightarrow L(f,z)]$
$L(f,z)$: '$\lim_{x\to z} f(x) = f(z)$'	$\forall f \forall g \forall z S(f,g,z)$
$S(f,g,z)$: '$\lim_{x\to z}(f+g)(x) = \lim_{x\to z}[f(x)+g(x)]$'	$\forall f \forall g \forall z P(f,g,z)$
$P(f,g,z)$: '$\lim_{x\to z}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to z} f(x) + \lim_{x\to z} g(x)$'	$\forall f \forall g \forall z Z(f,g,z)$
$I(f,g,z)$: '$\lim_{x\to z}(f+g)(x) = \lim_{x\to z} f(x) + \lim_{x\to z} g(x)$'	$\forall f \forall g \forall z[S(f,g,z) \wedge P(f,g,z) \to I(f,g,z)]$
$M(f,g,z)$: '$\lim_{x\to z} f(x) + \lim_{x\to z} g(x) = f(z)+g(z)$'	$\forall f \forall g \forall z[L(f,z) \wedge L(g,z) \to M(f,g,z)]$
$J(f,g,z)$: '$\lim_{x\to z}(f+g)(x) = f(z)+g(z)$'	$\forall f \forall g \forall z[I(f,g,z) \wedge M(f,g,z) \to J(f,g,z)]$
$Z(f,g,z)$: '$(f+g)(z) = f(z)+g(z)$'	$\forall f \forall g \forall z[J(f,g,z) \wedge Z(f,g,z) \to L(f+g,z)]$
	$\therefore \forall f \forall g \forall z[C(f,z) \wedge C(g,z) \to C(f+g,z)]$

Debemos observar que la variable que aparece como subíndice en los límites no se incluye entre las variables libres de los predicados definidos en los nombramientos. Ésto es porque ese subíndice en la definición de límite es una variable acotada por un cuantificador universal.

De otro lado, la prueba de este argumento requiere el uso de otro argumento que se dejó como ejercicio en la sección 1.4.2.

$$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to s \\ \hline \therefore p \wedge r \to q \wedge s \end{array}$$

Ejercicios 2.5.2. I. Realice las pruebas de validez de las traducciones de:

1. Ejemplo 2.5.1.
2. Ejemplo 2.5.2.
3. Ejemplo 2.5.3.

II. Averigue los enunciados y complete las demostraciones de los siguientes teoremas, para obtener los argumentos lógicos correspondientes.

1. El límite de una suma es la suma de los límites, siempre que cada límite exista.
2. El límite de un producto es el producto de los límites, siempre que cada límite exista.
3. El límite de un cociente es cociente de los límites, siempre que cada límite exista y que el límite del denominador sea diferente a cero.
4. El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función, siempre que el límite exista.
5. Si f y g son continuas en a , entonces $f - g$ es continua en a.
6. Si f y g son continuas en a , entonces fg es continua en a.
7. Si f es continua en a , entonces cf es continua en a.
8. Si f y g son continuas en a , entonces f/g es continua en a, siempre que $g(a) \neq 0$.

III. Traduzca el enunciado de los siguientes teoremas. Luego basandose en los puntos 1,2 y 3 de los ejercicios 1.5.2 escriba la demostración y traduzcala.

1. Para x un real número positivo y n un número real se cumple la igualdad $\log_a(x^n) = n \log_a x$.
2. Para x y y números reales positivos se cumple la igualdad $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.
3. Para x y y números reales positivos se cumple la igualdad $\log_a(\frac{1}{y}) = -\log_a y$.
4. Para x y a números reales positivos con $a \neq 1$, se cumple la igualdad $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Capítulo 3

Métodos de demostración

Las demostraciones son posibles en un 'contexto' lo suficientemente riguroso como para garantizar su planteamiento exacto y su alcance 'universal'. Este contexto es el sistema axiomático. Las demostraciones entonces son argumentaciones válidas y rigurosas en un sitema axiomático. Demostrar una afirmación requiere conocer los axiomas de la teoría en la que se afirma, y una dosis importante de creatividad. Sin embargo, también requiere de experiencia. Los métodos de demostración presentados en este capítulo pretenden ofrecer esa cantidad mínima de experiencia que un estudiante necesita para empezar a hacer demostraciones sencillas. Por lo tanto, al hacer una lista de métodos de demostración pretendemos lograr un resumen de la experiencia de demostrar.

3.1. Sistema axiomático

Contaremos aqui las generalidades de un sistema axiomático con la intención de indicar que los teoremas y sus demostraciones se plantean en un lenguaje lógico. Para resumir el contenido de este lenguaje lógico veamos el siguiente gráfico:

$$
\begin{tikzcd}
 & & Logica \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
Proposiciones \arrow[ddd] & & \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, = \arrow[d] & & Predicados \arrow[dll] \arrow[ddd] \\
 & & \forall, \exists \arrow[ddll] \arrow[dd] & & \\
 & & & & \\
Formulas\ sin\ variables\ libres \arrow[drr] & & Vocabulario \arrow[d] & & Formulas\ con\ variables\ libres \arrow[dll] \\
 & & Formulas & &
\end{tikzcd}
$$

En el diagrama la palabra *Vocabulario* indica las operaciones, funciones, constantes y relaciones propias de un universo de discurso. Las operaciones se suponen definidas para todos los elementos del universo de discurso, es decir, siempre se pueden operar dichos elementos y además el resultado es otro elemento del universo de discurso. Por ejemplo, como operaciones en los números reales conocemos a la suma y al producto, como funciones al valor absoluto de un número, el cuadrado, el cubo, el duplo, la raíz cuadrada,etc. Las relaciones son predicados asi como 'menor que', 'menor o igual', 'mayor', 'mayor igual', etc; finalmente como constantes reconocemos a los módulos de las operaciones 0 y 1, o a los irracionales π, $\sqrt{2}$, e, etc.

Una vez construido el conjunto de fórmulas podemos traducir el conjunto de verdades de cada 'Teoría matemática' que conocemos. Ese conjunto de verdades es el conjunto de axiomas que conforman la base de un sistema axiomático. Una vez logrado el conjunto de axiomas, se trata de inferir otras fórmulas y también de plantear argumentos válidos (teoremas) que puedan tener aplicación en el quehacer matemático.

3.1.1. Axiomas

Definición 20. El conjuntos de axiomas de un sistema axiomático es un listado de fórmulas que usan el vocabulario del sistema. Este conjunto de fórmulas debe ser consistente.

$$
\begin{tikzcd}
 & Logica \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Formulas \arrow[d] \arrow[dr] & & Inferencia\ y\ Equivalencia \arrow[dd] \\
Sistema\ axiomatico \arrow[r] & Axiomas \arrow[d] \arrow[dr] & \\
 & Definiciones \arrow[r] & Teoremas
\end{tikzcd}
$$

Del conjunto de axiomas se necesitará definir conceptos para hacer fácil el ejercicio de inferir los teoremas que son la esencia de la teoría que busca caracterizar el sistema axiomático.
Conocemos en matemática ciertos universos de discurso en los que usamos propiedades de sus constantes, funciones, relaciones y operaciones para obtener resultados de nuestra utilidad. Entre estos universos se cuentan los números reales, enteros, racionales, irracionales, y reales. Cada una de esas propiedades que asumimos como ciertas forman parte de un conjunto de axiomas que el universo de discurso cumple. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.1.1.

Teoría: de Grupos	**Vocabulario:**			
	Operaciones:	$*$		
	Constantes:	e		
			Propiedad	**Axiomas:**
			(Asociativa)	$\forall x \forall y \forall z[(x * y) * z = x * (y * z)]$
			(Modulativa)	$\forall x[(x * e = x) \wedge (e * x = x)]$
			(Opuestos)	$\forall x \exists y[(x * y = e) \wedge (y * x = e)]$

Estos axiomas se conocen como los axiomas de grupo. Sabemos que los universos de discurso $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ cada uno con la suma y el cero cumplen los axiomas de grupo. También sabemos que los universos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ sin el cero con el producto y el uno, cumplen estos axiomas.

Ejemplo 3.1.2.

Teoría: de Anillos **Vocabulario:**

Operaciones: *, +
Constantes: a, e

Propiedad	**Axiomas:**
(Asociativa)	$\forall x \forall y \forall z[(x * y) * z = x * (y * z)]$
	$\forall x \forall y \forall z[(x + y) + z = x + (y + z)]$
(Modulativa)	$\forall x[(x + e = x) \wedge (e + x = x)]$
	$\forall x[(x * a = x) \wedge (a * x = x)]$
(Opuestos)	$\forall x \exists y[(x + y = e) \wedge (y + x = e)]$
(Conmutativa)	$\forall x \forall y(x + y = y + x)$
(Distributiva)	$\forall x \forall y \forall z[(x + y) * z = (x * z) + (y * z)]$

Estos axiomas son los axiomas de anillo. Los universos de discurso $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ cada uno con la suma, el producto, el cero y el uno los cumplen. El conjunto de los naturales no cumple los axiomas de anillo.

Ejemplo 3.1.3.

Teoría: de Cuerpos **Vocabulario:**

Operaciones: *, +
Constantes: a, e

Propiedad	**Axiomas:**
(Asociativa)	$\forall x \forall y \forall z[(x * y) * z = x * (y * z)]$
	$\forall x \forall y \forall z[(x + y) + z = x + (y + z)]$
(Modulativa)	$\forall x[(x + e = x) \wedge (e + x = x)]$
	$\forall x[(x * a = x) \wedge (a * x = x)]$
(Opuestos)	$\forall x \exists y[(x + y = e) \wedge (y + x = e)]$
	$\forall x \exists y[(x \neq e) \rightarrow ((x * y = a) \wedge (y * x = a))]$
(Conmutativa)	$\forall x \forall y(x + y = y + x)$
	$\forall x \forall y(x * y = y * x)$
(Distributiva)	$\forall x \forall y \forall z[(x + y) * z = (x * z) + (y * z)]$

Éstos son los axiomas de cuerpo. Los universos de discurso $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ cada uno con la suma, el producto, el cero y el uno los cumplen. Los naturales y los enteros no cumplen los axiomas de cuerpo.

Ejemplo 3.1.4.

Teoría: Aritmética de Peano **Vocabulario:**

Operaciones: *, +
Constantes: e, a

Propiedad	**Axiomas:**
	$\forall x(x + a \neq e)$
	$\forall x \forall y[(x + a = y + a) \rightarrow x = y]$
(Modulativa)	$\forall x(x + e = x)$
	$\forall x(x * e = e)$
	$\forall x \forall y[x + (y + a) = (x + y) + a]$
	$\forall x \forall y[x * (y + a) = x * y + x]$
(Inducción)	$[\phi(e) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(x + a)]$
	$\rightarrow \forall x \phi(x)$
	ϕ una fórmula con variable libre x.

Éstos son los axiomas de Peano. El universo de discurso $\mathbb{N}$ con la suma, el producto, el cero y el uno los cumple.

Debemos notar que el último axioma en realidad representa una cantidad infinita de axiomas, puesto que es uno para cada posible fórmula ϕ. Ésto se llama *esquema axiomático*.

Ejercicios 3.1.1.

I. Diga por que los siguientes universos de discurso con las operaciones indicadas no cumplen los axiomas. Indique cuales axiomas cumple y cuales no.

1. $\mathbb{N}$ con la suma y el cero no cumple los axiomas de grupo.
2. $\mathbb{N}$ sin el cero con el producto y el uno no cumple los axiomas de grupo.
3. $\mathbb{Z}$ sin el cero con el producto y el uno no cumple los axiomas de grupo.
4. $\mathbb{N}$ con la suma, el producto, el cero y el uno no cumple los axiomas de anillo.
5. $\mathbb{Z}$ con la suma, el producto, el cero y el uno no cumple los axiomas de cuerpo.
6. $\mathbb{Z}$ con la suma, el producto, el uno y el cero no cumple los axiomas de Peano.
7. $\mathbb{Q}$ con la suma, el producto, el uno y el cero no cumple los axiomas de Peano.
8. $\mathbb{R}$ con la suma, el producto, el uno y el cero no cumple los axiomas de Peano.

II. Para cada una de las teorías nombradas a continuación realice la traducción lógica de sus axiomas. Las propiedades enunciadas tienen los siguientes significados. Una relación es reflexiva si todó elemento del universo de discurso se relaciona con sí mismo. Una relación es antisimétrica si siempre que un elemento se relacione con un segundo elemento y también este segundo elemento se relaciona con el primero, entonces estos dos elementos son iguales. Una relación es transitiva si siempre que un primer elemento se relaciona con un segundo elemento, y el segundo con un tercero, entonces el primero se relaciona con el tercero.

1.

Teoría: de conjuntos ordenados	**Vocabulario:**	
	Relaciones:	R
	Propiedad	**Axiomas:**
	(Reflexiva)	?
	(Antisimétrica)	?
	(Transitiva)	?

2.

Teoría: de ordenes lineales	**Vocabulario:**	
	Relaciones:	R
	Propiedad	**Axiomas:**
	(Reflexiva)	?
	(Antisimétrica)	?
	(Transitiva)	?
	(Tricotomía)	?

3.

Teoría: de ordenes lineales densos	**Vocabulario:**	
	Relaciones:	R
	Propiedad	**Axiomas:**
	(Reflexiva)	?
	(Antisimétrica)	?
	(Transitiva)	?
	(Tricotomía)	?
	(Densidad)	Entre dos elementos diferentes, hay otro.

4.

Teoría: de ordenes con extremo superior	**Vocabulario:**	
	Relaciones:	R
	Propiedad	**Axiomas:**
	(Reflexiva)	?
	(Antisimétrica)	?
	(Transitiva)	?
	(Tricotomía)	?
	(Máximo)	?

5.

Teoría: de ordenes con extremo inferior	**Vocabulario:**	
	Relaciones:	R
	Propiedad	**Axiomas:**
	(Reflexiva)	?
	(Antisimétrica)	?
	(Transitiva)	?
	(Tricotomía)	?
	(Mínimo)	?

6.

Teoría: de ordenes con extremos	**Vocabulario:**	
	Relaciones:	R
	Propiedad	**Axiomas:**
	(Reflexiva)	?
	(Antisimétrica)	?
	(Transitiva)	?
	(Tricotomía)	?
	(Mínimo)	?
	(Máximo)	?

7.

Teoría: de ordenes sin extremos	**Vocabulario:**	
	Relaciones:	R
	Propiedad	**Axiomas:**
	(Reflexiva)	?
	(Antisimétrica)	?
	(Transitiva)	?
	(Tricotomía)	?
	(Sin Mínimo)	?
	(Sin Máximo)	?

III. Diga para cuales de las teorías enunciadas en el punto anterior los universos de discurso listados a continuación cumplen sus axiomas. En cada caso indique cuales axiomas cumple y cuales no.

1. $\mathbb{N}$ con la relación 'menor que'.
2. $\mathbb{Z}$ con la relación 'menor que'.
3. $\mathbb{Q}$ con la relación 'menor que'.
4. $\mathbb{R}$ con la relación 'menor que'.
5. $\mathbb{N}$ con la relación 'mayor que'.
6. $\mathbb{Z}$ con la relación 'mayor que'.
7. $\mathbb{Q}$ con la relación 'mayor que'.
8. $\mathbb{R}$ con la relación 'mayor que'.

9. $\mathbb{N}$ con la relación 'mayor o igual que'.
10. $\mathbb{Z}$ con la relación 'mayor o igual que'.
11. $\mathbb{Q}$ con la relación 'mayor o igual que'.
12. $\mathbb{R}$ con la relación 'mayor o igual que'.
13. $\mathbb{N}$ con la relación 'menor o igual que'.
14. $\mathbb{Z}$ con la relación 'menor o igual que'.
15. $\mathbb{Q}$ con la relación 'menor o igual que'.
16. $\mathbb{R}$ con la relación 'menor o igual que'.
17. Si alguna de las teorías no se verifica por ninguno de los universos de discurso anteriores, encuentre un universo de discurso que si.

IV. ¿De los axiomas de la aritmética de Peano se podrá inferir los de grupo?

V. ¿De los axiomas de la aritmética de Peano se podrá inferir los de orden usando alguna definición?

VI. Averigue los axiomas de los siguientes sistemas axiomáticos y enuncielos en una fórmula.

1. Anillo ordenado.
2. Cuerpo ordenado.
3. Cuerpo algebraicamente cerrado.
4. Módulo.

3.1.2. Definiciones

Una vez planteadas los axiomas del sistema axiomático, se busca inferir resultados nuevos enunciados o argumentos que justifiquen el planteamiento del sistema. Aparecen entonces conceptos de forma recurrente, que es necesario nombrar. Así, que definir es una necesidad en los sitemas axiomáticos. Definimos para nombrar de forma breve. Luego cuando se define surge un nombre y usualmente un símbolo.

En la tabla a continuación se presentan algunos ejemplos.

Nombre	**Símbolo**	**Concepto**	**Sistema axiomático**
y es **Par**	-	$\exists x(2x = y)$	Aritmética de Peano
y es **Impar**	-	$\exists x(2x + 1 = y)$	Aritmética de Peano
x **Divide a** y	$x\|y$	$\exists z(x.z = y)$	Semigrupos
y es **Primo**	-	$\forall x(x\|y \rightarrow x = y \vee x = 1)$	Aritmética de Peano
x **es el cuadrado de** y	$x = y^2$	$x = y.y)$	Semigrupos
x es el **Sucesor** de y	-	$(y \leq x \wedge \forall z(y \leq z \rightarrow x \leq z)$	Órdenes

Ejercicios 3.1.2.

I. Averigue y traduzca las definiciones correspondientes a los siguientes nombres y diga en que sistema axiomático pueden surgir. Si existe un símbolo, indíquelo.

1. 2
2. 3
3. 4
4. 5
5. n
6. Positivo.
7. Negativo.

8. Mínimo.
9. Máximo.
10. Supremo.
11. Infimo.
12. Cota superior.
13. Cota inferior.
14. Raíz cuadrada.
15. Raíz cúbica.
16. Valor absoluto.

3.1.3. Teoremas

Los teoremas son afirmaciones lógicas (fórmulas) en el vocabulario del sistema axiomático, que se pueden inferir de los axiomas, basandose en muchos casos en las definiciones y posiblemente en otros teoremas. Para verificar que una afirmación es un teorema de un sistema axiomático es necesaria una demostración. Esto significa que para probar que una afirmación es un teorema del sistema, se debe plantear un argumento válido cuya conclusión sea la afirmación y las premisas sean axiomas, otros teoremas o definiciones del sistema.

Teorema:		ϕ_1	
ϕ		$\vdots$	
Demostración:	$\Leftrightarrow$	ϕ_n	Axiomas
$\phi_1, ..., \phi_n, \psi_1, ..., \psi_m, \gamma_1, ..., \gamma_k \square$		ψ_1	
		$\vdots$	
		ψ_n	Definiciones
		γ_1	
		$\vdots$	
		γ_k	Teoremas
		$\therefore \phi$	

Al ser un teorema la conclusión de un argumento válido, su demostración encierra una implicación, y es por eso que los métodos de demostración sugieren el uso de reglas de inferencia como demostración por contrarecíproca, demostración directa (MP), y demostración por contradicción.

Existen varios nombres para referirse a un teorema. Éstos se usan según la importancia que tenga el teorema. En la siguiente tabla se intenta organizar los nombres de los teoremas según su importancia.

Nombre	**Importancia**
Hecho	1
Observación	2
Proposición	3
Teorema	4
Lema	5

Otro nombre muy común es el de *Corolario*, no aparece en la tabla puesto que en algunas situaciones tiene la importancia de un hecho y en otras tiene mayor importancia que un lema. Lo que caracteriza a un corolario es que es una consecuencia inmediata de un teorema enunciado y probado antes.

En general no hay un orden universal y los autores suelen establecer sus propios niveles de importancia.

3.2. Métodos de demostración

Como mencionamos antes, las demostraciones consisten en el planteamiento de un argumento válido cuya conclusión sea el enunciado del teorema a probar. En el contexto en el que un teorema se plantea, el sistema axiomático, las premisas de dicho argumento pueden ser axiomas, definiciones u otros teoremas. Cuando se incluyen teoremas en este planteamiento es frecuente encontrar dentro de la demostración, la demostración de estos teoremas. Un ejemplo de esta práctica es la demostración por casos o de equivalencias múltiples.

Teorema:		ϕ_1	
ϕ		$\vdots$	
Demostración:	$\Leftrightarrow$	ϕ_n	Axiomas
$\phi_1, ..., \phi_n, \psi_1, ..., \psi_m, \gamma_1, ..., \gamma_k \Box$		ψ_1	
		$\vdots$	
		ψ_n	Definiciones
		γ_1	
		$\vdots$	
		γ_k	Teoremas
		$\therefore \phi$	

Sabemos además que un argumento representa una implicación, luego los métodos de demostración o formas básicas para abordar una prueba sugieren la verificación de una implicación. Sin embargo, la esencia de cada demostración esta en la creatividad del que demuestra y en su nivel de conocimientos del sistema axiomático.

3.2.1. Demostración directa

La expresión 'demostración directa' encierra un contraste con las demostraciones indirectas. Son las demostraciones indirectas las que tienen una estructura claramente definida. En una demostración indirecta puede en general suceder que se prueba un resultado equivalente (Contrarrecíproca) o se plantea un argumento válido con otra conclusión, tal que ese argumento resulta equivalente a un argumento válido con la conclusión original (contradicción). Por el contrario en la prueba directa se plantea un argumento válido cuya conclusión es exactamente el enunciado del teorema.

Estamos dando entonces una definición de demostración directa negativa, es decir, es una demostración que no es indirecta. Daremos algunos ejemplos, y traduciremos los argumentos, pero la estructura de una demostración directa sólo se logrará identificar una vez el lector conozca las indirectas.

Teorema 3.2.1. *La suma de números pares en* $\mathbb{N}$ *es par.*

Demostración.
Sean a, b números pares. Luego por definición de par existen k, m en $\mathbb{N}$ tales que $a = 2k$ y $b = 2m$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} a + b &= 2k + 2m \\ &= 2(k + m) \end{aligned}$$

Como $k + m$ es un número natural entonces $a + b$ es par. $\Box$

Veamos que esta demostración corresponde a un argumento válido cuya conclusión es exactamente el enunciado del teorema.

Ejemplo 3.2.1.

Nombramientos:	**Traducción:**
$P(x)$: 'x es par'	$P(a)$
	$P(b)$
	$\forall x[P(x) \leftrightarrow \exists y(x = 2y)]$
	$\forall x \forall y \forall z \forall w[(x = z) \wedge (y = w) \rightarrow (x + y = z + w)$
	$\forall x \forall y[2x + 2y = 2(x + y)]$
	$\forall x \forall y[(x = y) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)]$
	———————
	$\therefore P(a) \wedge P(b) \rightarrow P(a + b)$

Ejercicios 3.2.1.

I. Demuestre cada uno de los siguientes enunciados:

1. La suma de dos números pares es par.
2. La suma de dos números impares es par.
3. El producto de dos números pares es par.
4. El producto de dos números impares es impar.
5. El cuadrado de un número entero termina en 0, 1, 4,5, 6 o 9.
6. La potencia cuarta de un número entero termina en 0, 1, 5 o 6.
7. Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$ o $x = -y$.
8. Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|(b + c)$, para a, b y c enteros.
9. Si $a|b$ entonces $a|bc$, para a, b y c enteros.
10. Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|bx + cy$, para a, b, c, x y y enteros.
11. Si $a|b$ y $a|c$ entonces $a|bc$, para a, b y c enteros.
12. si x es impar entonces es la suma de dos enteros consecutivos.

3.2.2. Demostración por contradicción

En una demostración por contradicción no se plantea un argumento válido cuya conclusión sea el enunciado del teorema, lo que se plantea es un argumento válido equivalente. Es decir, si el teorema afirma ϕ entonces planteamos un argumento válido 1 cuya conclusión sea $\mathbb{F}$:

Teorema:		**Demostración por contradicción:** **Argumento Válido 1:**
ϕ		$\neg\phi$
	se prueba $\Rightarrow$	———
		$\therefore \mathbb{F}$

Luego si el argumento de la derecha es válido entonces la implicación que representa es una tautología. Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{array}{rl} & \neg\phi \rightarrow \mathbb{F} \equiv \mathbb{V} \\ (Cont)(DN) & \neg\mathbb{F} \rightarrow \phi \equiv \\ (LN)(LM)(DN) & \mathbb{V} \rightarrow \phi \equiv \end{array}$$

Entonces, dado que $\mathbb{V} \to \phi \equiv \mathbb{V}$, hemos logrado un argumento válido 2 cuya conclusión es ϕ:

Teorema:		**Argumento Válido 2:**
ϕ	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{V}$
		———
		$\therefore \phi$

El argumento válido 2 es equivalente al 1, y aunque es el 2 el que prueba el teorema, la demostración por contradicción consiste en plantear el argumento 1. Es por eso que es una demostración indirecta. La demostración por contradicción es también llamada demostración por reducción al absurdo.

Observación 17.

Para un teorema cuyo enunciado es ϕ, a la hipótesis $\neg\phi$ en la demostración por contradicción la llamaremos hipóteisis de contradicción.

Ejemplo 3.2.2.

Teorema 3.2.2. *$\sqrt{2}$ es irracional.*

La demostración de este teorema es por contradicción, y tal como se tradujo en la sección 2.5.2, el argumento es el siguiente:

Nombramientos:	**Traducción:**
$R(x)$: 'x es racional'	$R(\sqrt{2})$
$S(x,y)$: 'x y y son primos entre sí'	$\forall z[R(z) \to \exists x \exists y[S(x,y) \wedge T(x,y)]]$
$T(x,y)$: '$\sqrt{2} = \frac{x}{y}$'	$\forall x \forall y[T(x,y) \to U(x,y)]$
$U(x,y)$: '$\sqrt{2}^2 = \frac{x^2}{y^2}$'	$\forall x \forall y[U(x,y) \to V(x,y)]$
$V(x,y)$: '$2 = \frac{x^2}{y^2}$'	$\forall x \forall y[V(x,y) \to W(x^2,y^2)]$
$W(x,y)$: '$2y = x$'	$\forall x \forall y[W(x^2,y^2) \to P(x^2)]$
$Q(x,y)$: '$2y = 4x$'	$\forall x[P(x^2) \to P(x)]$
$P(x)$: 'x es par'	$\forall x[P(x) \to \exists z W(x,z)]$
	$\forall x \forall y \forall z[W(x,z) \wedge W(x^2,y^2) \to Q(z^2,y^2)]$
	$\forall z \forall y[Q(z^2,y^2) \to W(y^2,z^2)]$
	$\forall x \forall y[P(x) \wedge P(y) \to \neg S(x,y)]$
	———————————
	$\therefore \neg R(\sqrt{2})$

En la prueba de validez de este teorema se infiere en un reglón $\neg S(a,b)$ y en otro reglón $S(a,b)$; luego usando adición agragamos $\neg R(\sqrt{2})$ y por silogismo disyuntivo inferimos que $\sqrt{2}$ no es racional. Pero también podemos usar conjunción (Conj) para inferir $S(a,b) \wedge \neg S(a,b) \equiv \mathbb{F}$. Es decir que una traducción equivalente de la demostración es:

Traducción:

$$
\begin{array}{l}
R(\sqrt{2}) \\
\forall z[R(z) \to \exists x \exists y[S(x,y) \wedge T(x,y)]] \\
\forall x \forall y[T(x,y) \to U(x,y)] \\
\forall x \forall y[U(x,y) \to V(x,y)] \\
\forall x \forall y[V(x,y) \to W(x^2,y^2)] \\
\forall x \forall y[W(x^2,y^2) \to P(x^2)] \\
\forall x[P(x^2) \to P(x)] \\
\forall x[P(x) \to \exists z W(x,z)] \\
\forall x \forall y \forall z[W(x,z) \wedge W(x^2,y^2) \to Q(z^2,y^2)] \\
\forall z \forall y[Q(z^2,y^2) \to W(y^2,z^2)] \\
\forall x \forall y[P(x) \wedge P(y) \to \neg S(x,y)] \\
\hline
\therefore \mathbb{F}
\end{array}
$$

En la sección 14 usamos la primera traducción para mostrar que se trataba de un argumento válido con la conclusión que queriamos. Sin embargo, no se aclara porque se puede usar la negación como enunciado como premisa. Es por eso que para presentar el método de demostración por contradicción es mas precisa esta última presentación.

Cuando se hace una demostración por contradicción la primera premisa del argumento válido a plantear es la negación del enunciado del teorema.

Ejemplo 3.2.3.

Teorema 3.2.3. *Ningún entero puede ser par e impar.*

Demostración. **(Contradicción)**
Supongamos que x es un entero que es par e impar. Luego por definición existen enteros a y b tales que:

$$
\begin{aligned}
x &= 2a \\
&= 2b + 1
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
2a &= 2b + 1 \\
2(a - b) &= 1 \\
(a - b) &= 1/2
\end{aligned}
$$

Como $a - b$ es un número entero, lo anterior significa que $1/2$ es un número entero. $\square$

Nombramientos:	**Traducción:**
$P(x)$: 'x es par'	$\exists x[P(x) \wedge I(x)]$
$I(x)$: 'x es impar'	$\forall x[P(x) \leftrightarrow \exists z(x = 2z)]$
$E(x)$: 'x es entero'	$\forall x[I(x) \leftrightarrow \exists z(x = 2z + 1)]$
	$\forall x \forall y[(x = y) \wedge (x = z) \rightarrow (y = z)]$
	$\forall x \forall y[(2x = 2y + 1) \rightarrow 2(x - y) = 1]$
	$\forall x \forall y[2(x - y) = 1 \rightarrow (x - y) = 1/2]$
	$\forall x \forall y E(x - y)$
	$\forall z \forall y[(x = y) \wedge E(x) \rightarrow E(y)]$
	$\therefore E(1/2)$

Como $1/2$ no es entero, sabemos que $E(1/2) \equiv \mathbb{F}$.

Cuando el enunciado del teorema es una implicación $\phi \rightarrow \psi$, entonces la hipótesis de contradicción es $\neg(\phi \rightarrow \psi)$. Por implicación material, ley de Morgan y doble negación sabemos que $\neg(\phi \rightarrow \psi) \equiv \phi \wedge \neg\psi$,luego la prueba por reducción al absurdo queda:

Teorema:	**Demostración por contradicción:**
$\phi \rightarrow \psi$	$\phi \wedge \neg\psi$
	$\therefore \mathbb{F}$

Ejercicios 3.2.2.

I. Demuestre las siguientes afirmaciones:

1. La suma de un número racional y uno irracional es irracional.
2. El producto de un número racional no nulo y uno irracional es irracional.
3. Si x es irracional entonces $3/x$ es irracional.
4. Si $n^2 + 7$ es impar entonces n es par.
5. 10 dias de cualquier grupo de 64 dias correspnden al mismo dia de la semana.
6. 3 de cualquier grupo de 25 dias corresponden al mismo mes del año.
7. Alguno de los reales $x_1, x_2, ..., x_n$ es mayor o igual al promedio $\frac{\sum_{k=1}^{n} x_i}{n}$.

3.2.3. Demostración por contrarrecíproca

En la demostración por contrarrecíproca se logra un argumento válido cuya conclusión es la contrarrecíproca del enunciado del teorema.

Teorema:		Demostración por contrarrecíproca: Argumento Válido 1:
$\phi \to \psi$	se prueba $\Rightarrow$	β
		ψ
		χ
		$\therefore \neg\psi \to \neg\phi$

Sabemos que si el argumento 1 es válido entonces por la regla de equivalencia (Cont) será válido el argumento 2:

Argumento Válido 2:

$$\begin{array}{l} \quad\beta \\ \quad\psi \\ \quad\chi \\ \hline \therefore \phi \to \psi \end{array}$$

Ejemplo 3.2.4.

Teorema 3.2.4. *Si el cuadrado de un entero es par entonces el entero es par.*

Demostración.

Si un entero x no es par entonces es impar, y si x es impar existe a entero tal que $x = 2a + 1$. Luego tenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} x &= 2a + 1 \\ x^2 &= (2a + 1)^2 \\ &= 4a^2 + 4a + 1 \\ &= 2(2a^2 + 2a) + 1 \end{aligned}$$

Como $2a^2 + 2a$ es un entero entonces x^2 es un número impar, y todo número impar es un número no par. □

Nombramientos:	**Traducción:**
$P(x)$: 'x es par'	$\forall x[\neg P(x) \to I(x)]$
$I(x)$: 'x es impar'	$\forall x[I(x) \leftrightarrow \exists y(x = 2y + 1)]$
$E(x)$: 'x es entero'	$\forall x \forall y[(x = y) \to (x^2 = y^2)]$
	$\forall x \forall y[(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$
	$\forall x \forall y[(2x + 2y) = 2(x + y)]$
	$\forall x E(2x^2 + 2x)$
	$\forall x[I(x) \to \neg P(x)]$
	$\therefore \forall x[\neg P(x) \to \neg P(x^2)]$

Ejercicios 3.2.3.

I. Demuestre las siguientes afirmaciones:

1. Si x^2 es impar entonces x es impar.
2. Si $5n + 4$ es par entonces n es par.
3.

3.2.4. Demostración por casos

La demostración por casos es una demostración directa en la que aparece una disyunción que lista todas las posibilidades para un elemento en algún contexto. Por ejemplo, cuando hablamos de un número real sabemos que tiene tres posibilidades: ese número es mayor a cero, o es igual o es menor. En algunas demostraciones para números reales es necesario tener en cuenta esta tricotomía. Luego en esas demostraciones se hará una demostración por casos.

Teorema:		**Demostración por casos:**
ϕ	se prueba $\Rightarrow$	$\phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n$
		$\phi_2 \to \phi$
		$\vdots$
		$\phi_n \to \phi$
		$\therefore \phi$

Una demostración por casos suele incluir las demostraciones de cada una de la implicaciones $\phi_i \to \phi$

3.2.5. Demostración de equivalencias múltiples

Es usual en matemáticas encontrar teoremas que listan enunciados equivalentes a alguna definición. Estos enunciados se conocen en matemáticas como *caracterizaciones*. La demostración de equivalencias múltiples requiere la prueba de cada una de dichas equivalencias al interior de la misma demostración. Es decir, requiere la prueba de varios bicondicionales. Cuando el teorema lista sólo una caracterización, será necesaria la prueba de un único bicondicional; en general usando la equivalencia $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$. Como suele haber mas de una caracterización, la prueba de las dos implicaciones para cada bicondicional generaría una demostración muy larga. El siguiente es el método mas usado, por brevedad, para este tipo de teorema.

Teorema:		**Demostración de equivalencias múltiples:**
Son equivalentes:		$\phi_1 \to \phi_2$
1) ϕ_1	se prueba $\Rightarrow$	$\phi_2 \to \phi_3$
2) ϕ_2		$\vdots$
3) ϕ_3		$\phi_{n-1} \to \phi_n$
$\vdots$		$\phi_n \to \phi_1$
n) ϕ_n		$\therefore (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2) \wedge (\phi_1 \leftrightarrow \phi_3) \wedge \ldots (\phi_{n-1} \leftrightarrow \phi_n)$

Ejercicios 3.2.4.

I. Demuestre los siguientes teoremas que incluyen equivalencias múltiples.

1. Que x sea un impar es equivalente a que exista un entero k tal que $x = 2k - 1$.

3.2.6. Demostración vacua

Una demostración vacua, vacía o trivial aparece cuando el teorema es una implicación premisa es es falsa. Es decir, la demostración consiste en demostrar que la premisa es falsa:

Teorema:		**Demostración vacua:**
$\phi \to \psi$	se prueba $\Rightarrow$	$\phi \leftrightarrow \mathbb{F}$
		$\therefore \phi \to \psi$

Esta demostraciones son comunes en la prueba del paso base de algunas demostraciones por inducción.

3.2.7. Demostración por inducción

Las demostraciones por inducción se aplican sólo a los números naturales puesto que es el único de los sistemas numéricos que cuenta con las siguientes carácteristicas: sucesor y mínimo. Ni en los reales ni en los racionales existe el sucesor de cada número. Y aunque en los enteros si existe el sucesor, este conjunto no tiene mínimo.

La idea de la demostración por inducción es probar que la afirmación ϕ se cumple para un primer número natural n_0, es decir que $\phi(n_0)$ es verdad y luego probar que de la verdad de $\phi(n)$ se puede pasar a la verdad para el sucesor $n + 1$ de n: $\phi(n + 1)$ también será verdad. El razonamiento sería entonces que como se ha probado que es cierto $\phi(n_0)$ entonces será cierto $\phi(n_0 + 1)$, y por lo tanto será cierto $\phi(n_0 + 2)$, y así sucesivamente.

Ejemplo 3.2.5.

Para una fórmula $\phi(x)$ enunciamos el principio de inducción matemática, el universo de discurso es $\mathbb{N}$.

Teorema 3.2.5.

$\phi(n)$ se cumple para todo $n \geq n_0$.

Traducción:

$$\begin{array}{l} \phi(n_0) \\ \forall n[\phi(n) \to \phi(n+1)] \\ \hline \therefore \forall n[n \geq n_0 \to \phi(n)] \end{array}$$

Ejercicios 3.2.5. I. Demuestre las siguientes igualdades sobre los números naturales:

1. $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
2. $1(2) + 2(3) + 3(4) + ... + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
3. $(1)(1!) + (2)(2!) + (3)(3!) + ... + (n)(n!) = (n + 1)! - 1$
4. $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5. $1^2 - 2^2 + 3^2 ... + (-1)^{n+1} n^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$
6. $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
7. $\frac{1}{(1)(3)} + \frac{1}{(3)(5)} + \frac{1}{(5)(7)} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
8. $\frac{1}{(2)(4)} + \frac{(1)(3)}{(2)(4)(6)} + \frac{(1)(3)(5)}{(2)(4)(6)(8)} + ... + \frac{(1)(3)...(2n-1)}{(2)(4)(6)...(2n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{(1)(3)(5)...(2n+1)}{(2)(4)(6)...(2n+2)}$
9. $\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + ... + \frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}$

3.2.8. Demostración existencial

3.2.9. Demostración de unicidad

Capítulo 4

Elementos de la teoría de conjuntos

4.1. Conjunto

4.1.1. Representaciones de los conjuntos

4.1.2. Relación de pertenencia

4.1.3. Igualdad y contenencia

4.1.4. Representaciones de los conjuntos

4.1.5. Definición de cardinal

4.2. Conjunto de partes

4.2.1. Cardinal del conjunto de partes

4.3. Operaciones entre conjuntos

4.3.1. Unión

4.3.2. Intersección

4.3.3. Diferencia

4.3.4. Diferencia simétrica

4.3.5. Complemento

4.4. Propiedades de las operaciones entre conjuntos

4.5. Familias de conjuntos

4.5.1. Unión de tamaño arbitrario

4.5.2. Intersección de tamaño arbitrario

4.6. Producto cartesiano

4.6.1. Pareja ordenada

4.6.2. Cardinal del producto cartesiano

4.6.3. Propiedades del producto respecto a las demás operaciones

4.7. Cardinal y operaciones conjuntistas